Математика : IMPACT-2020

I Математический блок

1. Рыбак поймал несколько рыб. Три самые большие рыбины (35% веса всего улова) он положил в холодильник, три самые маленькие ($\frac{5}{13}$ веса всех оставшихся) отдал коту, а остальные съел сам. Сколько рыб он поймал?
Ответ: 10.
Решение: В холодильник положили $\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ всей рыбы. Значит, осталось $\frac{13}{20}$ всей рыбы. Коту отдали $\frac{5}{13}$ от $\frac{13}{20}$, то есть $\frac{5}{20}$ всей рыбы. Таким образом, рыбак съел $\frac{8}{20}$ всей рыбы. Это больше, чем 3 рыбы, потому что даже 3 самых тяжелых рыбы — это только $\frac{7}{20}$. Но это меньше, чем 5 рыб, потому что средний вес даже трех самых маленьких рыб равен $\frac{5}{60}$ общего веса рыбы, значит 5 рыб должны весить не меньше, чем $\frac{25}{60}$ общего веса рыбы, а это больше, чем $8/20$. Получается, что рыбак съел 4 рыбы, а всего рыб было $3 + 3 + 4 = 10$.
Критерии оценивания:
Полное обоснованное решение – **10 б.**
Верный ход решения, но допущена вычислительная ошибка – **8 б.**
Приведен только верный ответ с проверкой – **1 б.**
Задача не решена или решена неверно – **0 б.**
Баллы не суммируются.

2. Найти наименьшее значение выражения $x_1^2+x_2^2$, если x_1, x_2 – действительные корни уравнения $x^2 - 2ax + a + 6 = 0$.
Ответ: 8.
Решение: Уравнение имеет действительные корни когда $D \geq 0$.

$$D = (-2a)^2 - 4 \cdot (a + 6) = 4a^2 - 4a - 24 = 4(a + 2)(a - 3) \geq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)\,.$$

По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a, \\ x_1 \cdot x_2 = a + 6. \end{cases}$$

$$S(a) = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 4a^2 - 2a - 12 = \left(2a - \frac{1}{2}\right)^2 - 12\frac{1}{4}.$$

$S_{min} = -12\frac{1}{4}$, если $a = \frac{1}{4}$.

Но, $\frac{1}{4} \notin (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)\,.$

$S(3) = 18$ или $S(-2) = 8$. Значить $S_{min} = 8$, при $a = -2$.
Критерии оценивания:
Полное обоснованное решение – **10 б.**
Верный ход решения, но допущена вычислительная ошибка – **8 б.**
Решена, не учитывая действительные корни – **3 б.**
Задача не решена или решена неверно – **0 б.**
Баллы не суммируются.

3. В треугольнике ABC с углом B, равным 120^0, биссектрисы AE, BD и CM пересекаются в точке O. Найдите угол DMO.

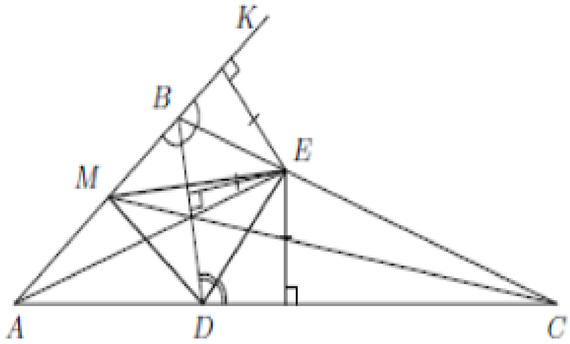
Ответ: 30^0

Решение: Пусть AE, BD и CM – биссектрисы треугольника ABC и $\angle ABC = 120^0$. На продолжении стороны AB за точку B возьмем точку K. Поскольку

$$\angle EBK = 180^0 - \angle ABC = 180^0 - 120^0 = 60^0 = \angle DBE,$$

то BE – биссектриса угла DBK, смежного с углом ABD. Поэтому точка E равноудалена от прямых AB, BD и CD(E -центр вневписанной окружности). Следовательно, DE – биссектриса угла BDC. Аналогично, DM – биссектриса угла ADB. Следовательно,

$$\angle MDE = \frac{1}{2}(\angle ADB + \angle BDC) = 90^0.$$

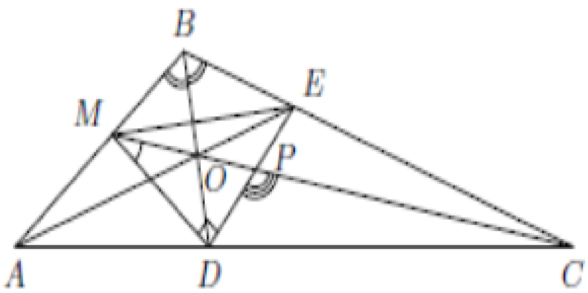


Если P – точка пересечения отрезков DE и CM, то P – точка пересечения биссектрис треугольника BDC. Поэтому

$$\angle DPC = 90^0 + \frac{1}{2}\angle DBC = 90^0 + 30^0 = 120^0,$$

а так как $\angle DPC$ – внешний угол прямоугольного треугольника MDP, то

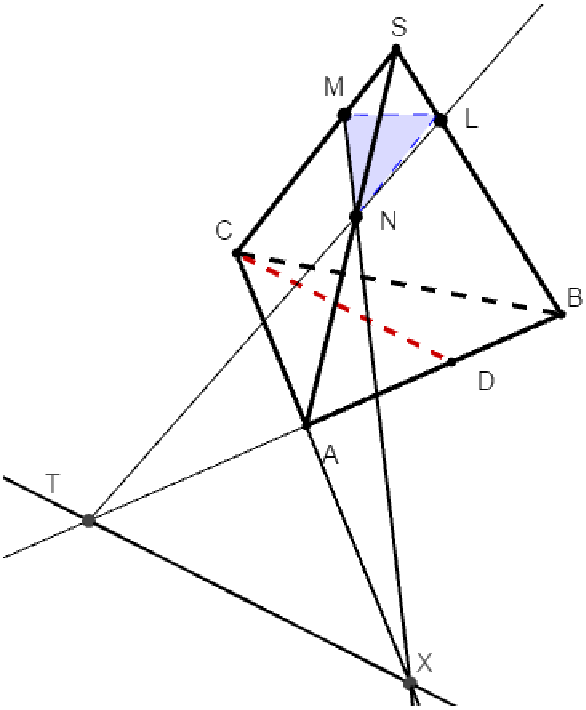
$$\angle DMO = \angle DPC - \angle MDP = 120^0 - 90^0 = 30^0.$$



Критерии оценивания:
BE – биссектриса угла DBK – **2 б.**
DE – биссектриса угла BDC – **1 б.**
DM – биссектриса угла ADB – **1 б.**
$\angle MDE = 90^0$ – **2 б.**
P – биссектриса угла BDC – **2 б.**
$\angle DPC = 120^0$ – **1 б.**
$\angle DMO = 30^0$ – **1 б.**
Баллы суммируются.

4. Решите уравнение: $x \cdot \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{1+x^2}$.
Ответ: $1, 1+\sqrt{2}$.
Решение: $-1 \le x \le 3$. Введем векторы: $\overrightarrow{a} = (x;1)$ и $\overrightarrow{b} = (\sqrt{1+x}; \sqrt{3-x})$.
Тогда $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x \cdot \sqrt{1+x} + 1 \cdot \sqrt{3-x}, |\overrightarrow{a}| = \sqrt{x^2+1}, |\overrightarrow{b}| = \sqrt{1+x+3-x} = 2$.
$|\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}| \le |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| = \sqrt{x^2+1} \cdot 2$.
Равенство выполняется если векторы коллинеарные, т.е. $\overrightarrow{a} = k \cdot \overrightarrow{b}.k = 1$.
Отсюда
$$x\sqrt{3-x} = \sqrt{1+x},$$
$$x^2(3-x) = 1+x, x \ge 0,$$
$$x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$$
$$(x-1)(x^2-2x-1) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 1+\sqrt{2}, \\ x = 1-\sqrt{2}(\text{пост.корень}). \end{array}\right.$$
Критерии оценивания:
Полное обоснованное решение – **10 б.**
Верный ход решения, но допущена вычислительная ошибка – **8 б.**
Приведен только верный ответ – **1 б.**
Задача не решена или решена неверно – **0 б.**
Баллы не суммируются.

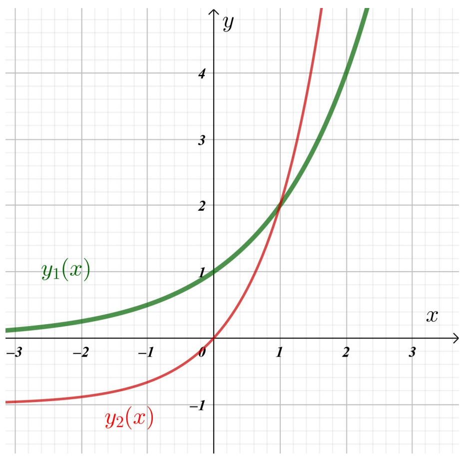
5. На боковом ребре SC пирамиды $SABC$ взята точка M так, что $SM : MC = 2 : 5$, а на ребре SA взята точка N так, что $SN : NA = 3 : 2$. Через прямую MN проведена плоскость α, параллельная медиане CD треугольника ABC. Плоскость α делит пирамиду на 2 части: верхнюю и нижнюю. Найдите объем нижней части, если объем данной пирамиды равен 280.
Ответ: 271.
Решение:
$(ASC): \ MN \cap AC = X$
$(ABC): \ XT || CD, XT \cap AB = T$
$(ASB): \ TN \cap SB = L$
MNL – искоемое сечение.
ΔSAC : По теореме Менелая
$$\frac{CM}{MS} \cdot \frac{SN}{NA} \cdot \frac{AX}{XC} = 1 \Rightarrow \frac{AX}{XC} = \frac{4}{15}$$
$(ACB) : CD||TX, \Delta CDA \sim \Delta XTA$
$$\frac{AC}{AX} = \frac{DA}{TA} = \frac{11}{4}$$
ΔSAB : По теореме Менелая
$$\frac{SL}{LB} \cdot \frac{BT}{AT} \cdot \frac{AN}{NC} = 1 \Rightarrow \frac{SL}{LB} = \frac{3}{13}$$
$$\frac{V_{SMLN}}{V_{SABC}} = \frac{SM \cdot SN \cdot SL}{SC \cdot SA \cdot SB} = \frac{9}{280}$$
$$V_{ABCNLM} = 280 - 9 = 271.$$
Критерии оценивания:
Полное обоснованное решение – **10 б.**
Верный ход решения, но допущена вычислительная ошибка – **8 б.**
Построен только сечение – **2 б.**
Задача не решена или решена неверно – **0 б.**
Баллы не суммируются.



II Методический блок

В заданиях № 6-7 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

6. Решите уравнение $2^x = 3^x - 1$.
«Ответ:» $x = 1$.
«Решение:» Построим на одном чертеже графики двух функций $y_1 = 2^x$ и $y_2 = 3^x - 1$.



Из чертежа видно, что эти графики пересекаются в точке (1; 2). Следовательно, решением уравнения является $x = 1$.
Комментарии. Корень уравнения найден правильно, но графический метод не сможет служить обоснованием решения.Так как, обе стороны уравнения монотонно возрастающие, не можем утверждать, что уравнение имеет единственный корень. Приведем правильное решение.
Перепишем уравнение в виде $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$. Производная функции $y(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$

равна $y'(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x\ln\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^x\ln\frac{1}{3}$, и, следовательно, $y'<0$ при всех x. Значит, функция $y(x)$ убывающая на всей числовой оси. Замечаем, что $y(1)=1$, поэтому корень $x=1$ единственный.

Критерии оценивания:
Указано, что ответ правильный – **1 б.**
Указана ошибка — **4 б.**
Приведено правильное решение — **5 б.**
Баллы суммируются.

7. Докажите равенство $\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}+\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}=\sqrt{20}$.
«Доказательство:» После возведения обеих частей данного равенства в куб и группировки слагаемых будем иметь

$$34\sqrt{5}+3\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}\cdot\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}\cdot\left(\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}+\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}\right)=20\sqrt{20}.$$

Если вместо выражения в круглых скобках подставить $\sqrt{20}$, то получим

$$34\sqrt{5}+3\sqrt[3]{1445-1444}\cdot\sqrt{20}=20\sqrt{20}\Leftrightarrow 34\sqrt{5}=17\sqrt{20}\Leftrightarrow 34\sqrt{5}=34\sqrt{5}.$$

Получили верное тождество, следовательно, исходное равенство справедливо.
Комментарий. В «решении» содержится логическая ошибка. Несмотря на то, что в результате преобразований исходного выражения получилось верное тождество, обратный вывод совсем не очевиден. Предположим два способа правильных рассуждений.
Способ 1. Обозначим $\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}+\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}=x$ и возведем обе части этого равенства в куб. В итоге после очевидных преобразований получим, что число x должно удовлетворять уравнению

$$x^3-3x-17\sqrt{20}=0.$$

«В лоб» решить это кубическое уравнение, не зная предыстории его появления, не просто.Однако, из условия задачи можно сделать вывод, что значение $x=\sqrt{20}$, вероятно, служит его корнем. Действительно, значение $x=\sqrt{20}$ обращает кубический трехчлен в нуль, что позволяет записать

$$x^3-3x-17\sqrt{20}=\left(x-\sqrt{20}\right)\left(x^2+\sqrt{20}x+17\right)$$

(второй сомножитель в этом выражении можно получить, например, поделив $x^3-3x-17\sqrt{20}$ на $x-\sqrt{20}$ «столбиком»). Далее убеждаемся в том, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2+\sqrt{20}x+17$ отрицателен, следовательно, этот квадратный трехчлен действительных корней не имеет. Таким образом, полученное единственное решение $x=\sqrt{20}$ кубического уравнения и доказывает требумое тождество.
Способ 2. Обозначим $a=\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}; b=\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}$ и заметим, что $a>0, b>0, ab=1$,

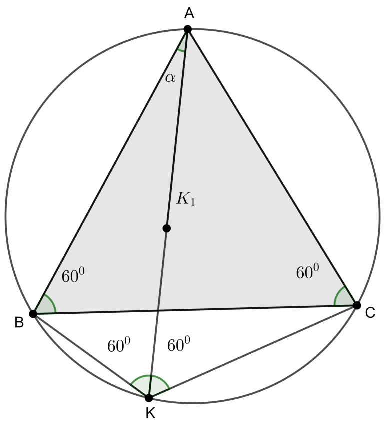
$$a^2=\sqrt[3]{\left(17\sqrt{5}+38\right)^2}=\sqrt[3]{\left(9+4\sqrt{5}\right)^3}=9+4\sqrt{5},$$

$$b^2=\sqrt[3]{\left(17\sqrt{5}-38\right)^2}=\sqrt[3]{\left(9-4\sqrt{5}\right)^3}=9-4\sqrt{5},$$

Следовательно, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=20$. Извлекая квадратный корень из обеих частей равенства $(a+b)^2=20$ с учетом того, что $a+b>0$, имеем $a+b=\sqrt{20}$, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания:
Указана ошибка — **4 б.**
Приведено правильное доказательсво — **6 б.**
Баллы суммируются.

8. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность. Точка K лежит на дуге BC. Докажите, что $AK = BK + CK$. Привести не менее трех разных доказательств.
Решение 1 (Теорема косинусов).



$\angle AKB = \angle ACB = \angle AKC = \angle ABC = 60^0$

$$AB^2 = BK^2 + AK^2 - 2 \cdot AK \cdot BK \cdot \cos 60^0$$

$$AC^2 = KC^2 + AK^2 - 2 \cdot KC \cdot AK \cdot \cos 60^0$$

$$BK^2 - KC^2 - AK \cdot BK + KC \cdot AK = 0$$

$$(BK - KC)(BK + KC) = AK (BK - KC)$$

$$AK = BK + KC$$

Если $BK = KC$, то AK – диаметр, $BK = KC$ – радиусы. Тоже выполняеться.
Решение 2 (Теорема Птолемея). По теореме Птолемея

$$BC \cdot AK = AB \cdot CK + AC \cdot KB$$

Так как $BC = AC = AB$,

$$AK = KC + KB$$

Решение 3 (Тригонометрия). Пусть $\angle BAK = \alpha$. Тогда $\angle ABK = 120^0 - \alpha$, $\angle KAC = 60^0 - \alpha$, $\angle ACK = 60^0 + \alpha$. По теореме синусов:

$$\frac{BK}{\sin\alpha} = \frac{AK}{\sin(120^0 - \alpha)}$$

$$\frac{CK}{\sin(60^0 - \alpha)} = \frac{AK}{\sin(60^0 + \alpha)}$$

$$BK = \frac{AK \sin\alpha}{\sin(120^0 - \alpha)}, CK = \frac{AK \sin(60^0 - \alpha)}{\sin(60^0 + \alpha)}$$

$$BK + CK = AK \left(\frac{\sin\alpha}{\sin(120^0 - \alpha)} + \frac{\sin(60^0 - \alpha)}{\sin(60^0 + \alpha)} \right)$$

$$BK + CK = AK \left(\frac{\sin\alpha}{\sin(60^0 + \alpha)} + \frac{\sin(60^0 - \alpha)}{\sin(60^0 + \alpha)} \right)$$

$$BK + CK = AK \left(\frac{\sin\alpha + \sin(60^0 - \alpha)}{\sin(60^0 + \alpha)} \right)$$

$$BK + CK = AK \left(\frac{2 \sin 30^0 \cdot \cos(\alpha - 30^0)}{\sin(60^0 + \alpha)} \right)$$

$$BK + CK = AK\left(\frac{\cos(\alpha - 30^0)}{\cos(\alpha - 30^0)}\right)$$

$$BK + CK = AK$$

Решение 4 (Метод координат). $A\,(0; R)\,, AC = 3\sqrt{R}$,

$$B\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}; -\frac{R}{2}\right), C\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; -\frac{R}{2}\right), K\,(-R\sin 2\alpha; -R\cos 2\alpha)\,.$$

$$BK^2 = R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2\alpha\right)^2 + R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos 2\alpha\right)^2 = R^2\left(2 - \sqrt{3}\sin 2\alpha - \cos 2\alpha\right)$$

$$CK^2 = R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 2\alpha\right)^2 + R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos 2\alpha\right)^2 = R^2\left(2 + \sqrt{3}\sin 2\alpha - \cos 2\alpha\right)$$

$$AK^2 = R^2\sin^2 2\alpha + R^2\,(1 + \cos\alpha)^2 = R^2\,(2 + 2\cos 2\alpha)$$

$$(BK + KC)^2 = R^2\,(4 - 2\cos 2\alpha) + 2R^2\sqrt{4 - 4\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha - 3\sin^2 2\alpha} =$$

$$= R^2\,(4 - 2\cos 2\alpha) + 2R^2\sqrt{4\cos^2 2\alpha - 4\cos 2\alpha + 1} = R^2\,(4 - 2\cos 2\alpha + 2\,(2\cos 2\alpha - 1)) =$$

$$= R^2\,(2 + 2\cos 2\alpha) = AK^2$$

$$AK = KB + KC$$

Решение 5 (Доп построение). Отложим на луче AK отрезок AK_1, равный отрезку CK. Тогда треугольники AK_1B и CKB равны по двум сторонам и углу между ними. В треугольнике BKK_1 $BK_1 = BK, \angle BKK_1 = \angle BKA = \angle BCA = 60^0$. Поэтому $KK_1 = BK$. Следовательно, $AK = AK_1 + K_1K = BK + CK$.

Решение 6 (Поворот) Повернем треугольник BKC против часовой стрелке на 60^0 вокруг точке B. Тогда $C \to A, K \to K_1$. $\angle AK_1B = 120^0$. В треугольнике BKK_1 угол $K_1BK = 60^0, BK = BK_1$. Тогда треугольник BKK_1 – равносторонний.Отсюда следует $BK_1K = 60^0$. Тогда точки A, K_1, K лежат на одной прямой, т.е. $K_1 \in AK$. Значить, $AK_1 = KC, K_1K = BK \Rightarrow AK = BK + KC$.

Критерии оценивания:

Приведено одно доказательство – **3 б.**

Приведены два доказательства – **6 б.**

Приведены три доказательства – **10 б.**

Баллы не суммируются.