International Mathematics, Physics and Computer Science Teachers Olympiad

Almaty, January 10, 2020

1. Each of 100 people played one game with each of the other 99 people: chess with 33 people, checkers with another 33 people, and backgammon with the remaining 33. Prove that there are three people A, B, C such that A and B played chess, B and C played checkers, C and A played backgammon.

2. In a cyclic quadrilateral $ABCD$ the bisectors of angles ACB, ADB, CBD, CAD are drawn. They intersect the sides of the quadrilateral at points X, Y, Z, T. Prove that X, Y, Z, T are concyclic.

3. Prove that no quadratic trinomial can be represented as a product of a finite number of periodical functions.

The following two problems are presented with solutions, which may be partially or entirely incorrect. Review and mark these solutions. Your marks should be fully explained.

4. The numbers a, b, c, d satisfy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Prove that $(2 + a)(2 + b) \geqslant cd$.

Solution. Obviously the absolute values of a, b, c, d do not exceed 2.

Since $c^2 + d^2 \geqslant 2cd$ we have $a^2 + b^2 + 2cd \leqslant 4$. On the other hand, $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, therefore, if in the inequality

$$2cd \leqslant 4 - a^2 - b^2 = 4 - 4 + 4 + 4a - 4a + 4b - 4b - (a^2 + b^2) + (a^2 + b^2) - (a^2 + b^2)$$

we diminish the subtracted term, the difference increases, thus $2cd \leqslant 4 - 4 + 4 + 4a - 4a + 4b - 4b - (a^2 + b^2) + 2ab - (a^2 + b^2) = (8 + 4a + 4b + 2ab) - (2a^2 + 4a + 2) - (2b^2 + 4b + 2)$. The latter inequality can be written in the form $cd \leqslant (2 + a)(2 + b) - (a + 1)^2 - (b + 1)^2$. Discarding the subtracted squares can not diminish the right hand side, thus $cd \leqslant (2 + a)(2 + b)$, q.e.d.

5. A hotel manager has keys of five rooms. Unfortunately he lost the tags. What minimum number of trials is certainly sufficient to find keys of all rooms?

Ответ: 10.

Решение. To find the keys in 10 trials, the manager can try all the keys with the first room (if 4 trials are unsuccessful, the remaining key must be the right one, that is, finding the key of the first room can not require more than 4 trials), then try the remaining keys with the second room (the right key is surely found in 3 trials) and so on.

Any smaller number of trials can be insufficient: if we try only three keys with the first room, they can be all wrong, and each of the remaining two keys can be the right one. Therefore, to find the first key we need at least 4 trials. After that we need at least 3 trials to find the second key and so on.

Международная олимпиада учителей математики, физики и информатики

Алматы, 10 января 2020 г.

1. Каждый из 100 человек сыграл с остальными 99 по партии в настольную игру: с 33 в шахматы, с 33 в шашки и с 33 в нарды. Докажите, что среди них есть три человека A, B и C такие, что A сыграл с B в шахматы, B с C – в шашки, а C с A – в нарды.

2. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ проведены биссектрисы углов ACB, ADB, CBD и CAD. Они пересекают стороны четырёхугольника в точках X, Y, Z и T. Докажите, что точки X, Y, Z и T лежат на одной окружности.

3. Докажите, что никакой квадратный трёхчлен нельзя представить в виде произведения конечного числа периодических функций.

Следующие две задачи предлагаются с уже написанными решениями, возможно, частично или полностью ошибочными. Проверьте и оцените эти решения. Ваши оценки должны быть письменно обоснованы.

4. Числа a, b, c и d таковы, что $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Докажите, что $(2+a)(2+b)\geqslant cd$.

Решение. Очевидно, модуль каждого из чисел a, b, c и d не превосходит 2.

Так как $c^2+d^2\geqslant 2cd$, имеем $a^2+b^2+2cd\leqslant 4$. С другой стороны, $a^2+b^2\geqslant 2ab$, и, если в неравенстве

$$2cd\leqslant 4-a^2-b^2=4-4+4+4a-4a+4b-4b-(a^2+b^2)+(a^2+b^2)-(a^2+b^2)$$

заменить вычитаемое меньшим, то разность увеличится, поэтому $2cd\leqslant 4-4+4+4a-4a+4b-4b-(a^2+b^2)+2ab-(a^2+b^2)=(8+4a+4b+2ab)-(2a^2+4a+2)-(2b^2+4b+2)$. Последнее неравенство преобразуется к виду $cd\leqslant(2+a)(2+b)-(a+1)^2-(b+1)^2$. Отбрасывая вычитаемые квадраты, которые неотрицательны, мы не уменьшим правую часть, следовательно, $cd\leqslant(2+a)(2+b)$, что и требовалось доказать.

5. У коменданта общежития есть связка с ключами от пяти комнат. К сожалению, бирки от ключей оторваны. Какого наименьшего количества проб хватит, чтобы узнать, какой ключ от какой комнаты?

Ответ: 10.

Решение. За 10 проб ключи можно подобрать так: последовательно вставлять ключи в первый замок (если первые 4 ключа не подойдут, то пятый гарантированно подходит, следовательно ключ от этого замка будет определён не более, чем за 4 пробы), отложить ключ от первого замка, а остальные последовательно вставлять во второй замок (нужный ключ будет определён не более, чем за 3 пробы) и т.д.

Меньшего числа может не хватить: если в первый замок вставить только три ключа, то может оказаться, что ни один из них не подойдёт, и любой из оставшихся может быть ключом от первого замка. Таким образом, для определения первого ключа нужно не менее чётырёх проб. После этого для определения второго нужно не менее трёх и т.д.