Математика. Тренерлер лигасы

Сіздерге екі бөлімнен тұратын тапсырмалар ұсынылады:

I. *«Математикалық бөлім» (**№1–№3 есептерді** шығаруға).*

II. *«Әдістемелік бөлім» (**№4–№6 есептер** олимпиада жаттықтырушысының күнделікті жұмысына бағытталған).*

*Байқау ұзақтығы: **4 сағат**.*

*Әр есеп **10 ұпаймен** бағаланады.*

I. *Математикалық бөлім*

1. Теңдеу. Берілген теңдеуді қанағаттандыратын барлық (x, y, z, t) нақты сандар төрттіктерін табыңыз:

$$1+\frac{1}{x}+\frac{2(1+x)}{xy}+\frac{3(1+x)(2+y)}{xyz}+\frac{4(1+x)(2+y)(3+z)}{xyzt}=0.$$

2. ЕҮОБ. Барлық бүтін оң a, b және c сандары үшін, $ab+bc+ca=5n$ болатындай берілген бүтін оң n саны үшін

$$\text{ЕҮОБ}(a,b)+\text{ЕҮОБ}(b,c)+\text{ЕҮОБ}(c,a)\text{-нің}$$

ең үлкен мүмкін мәнін анықтаңыз.

3. Геометрия. O нүктесі сүйір бұрышты ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрі болсын. Q нүктесі BOC үшбұрышына сырттай сызылған шеңберде жатыр, әрі OQ осы шеңбердің диаметрі. CQ түзуінен M нүктесі, ал BC кесіндісінен N нүктесі $ANCM$ төртбұрышы параллелограмм болатындай алынған. BOC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбер және AQ мен NM түзулері бір нүктеде қиылысатынын дәлелдеңіз.

II. *Әдістемелік бөлім*

4. Биссектриса. Тұжырымның әртүрлі төрт дәлелдемесін келтіріңіз:

Тұжырым

AL — ABC үшбұрышының биссектрисасы болсын, онда

$$AL^2 = AB\cdot AC - BL\cdot CL.$$

5. Қате іздеу. Математикалық олимпиадада мына есеп ұсынылды:

Есеп

$f:\mathbb{R}\to\left[\dfrac{1}{2022},2022\right]$ функциясы барлық $x\in\mathbb{R}$ үшін

$$f(f(x))=x^2f(x)-x+1$$

шартын қанағаттандырады. $f(1)$ -дің барлық мүмкін мәндерін табыңыз.

Төменде математикалық қателері болуы мүмкін **«оқушының шешу»** көрсетілген. Егер оқушының «шешуі» дұрыс болмаса, онда себебін түсіндіріп барлық қателерді көрсетіңіз және дұрыс шешуін келтіріңіз.

Оқушының «шешуі»

«Шешуі». *$f(f(x))=x^2f(x)-x+1$ теңдігін $P(x)$ деп белгілейміз.*

$P(1)$-ді қарастырамыз: :

$$f(f(1))=f(1).$$

Бұдан

$$f(f(f(1)))=f(f(1))=f(1).$$

Енді $P(f(1))$-ді қарастырамыз:

$$\begin{gathered}f(f(f(1)))=(f(1))^3-f(1)+1;\\ f(1)=(f(1))^3-f(1)+1;\\ (f(1))^3-f(1)-f(1)+1=0;\\ f(1)(f(1)-1)(f(1)+1)-(f(1)-1)=0;\\ (f(1)-1)((f(1))^2+f(1)-1)=0.\end{gathered}$$

Сонымен,

$$(f(1)-1)((f(1))^2+f(1)-1)=0 \iff$$

$$\left[\begin{array}{l}f(1)-1=0,\\ (f(1))^2+f(1)-1=0\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}f(1)=1,\\ f(1)=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.\end{array}\right.$$

«Жауабы»: $1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$

6. **Координация.** Математикалық олимпиадада мына есеп ұсынылды:

Есеп

Қандай да бір елде 2022 қала бар, олардың кейбіреулері жолдармен қосылған. Әрбір қала жоқ дегенде үш басқа қаламен жалғанған. Бұл жолдармен елдің кез-келген қаласынан басқа қаласына жетуге болады. (басқа қалалар арқылы да жүруі мүмкін). Кез-келген екі қала үшін ең қысқа жол анықтап алынды. Осы ең қысқа бағытта саны ең көп қанша жол болуы мүмкін?

Төменде оқушының **«толық емес шешімі»** берілген. Оқушының жұмысын жалғастырып, есептің толық шығару жолын көрсетіңіз. Координацияда оқушының жұмысын бағалау жөнінде Өзіңіздін негізделген ұсыныстарыңызды беріңіз (олимпиадада толық шығарылған есеп үшін, әдеттегідей, **7 балл** берілген).

Оқушының «толық емес шешімі»

Дәл k жолдары бар екі қала арасындағы ең қысқа жолды қарастырыңыз. Бұл бағыт A_0 және A_k қалаларын қосып,A_1, A_2, $\ldots$, A_{k-1} қалалары арқылы өтсін. Әрбір A_i қала елдегі A_{i-1} және A_{i+1} қалаларынан басқа кем дегенде бір басқа қаламен жол арқылы қосылады. Оны B_i деп атайық (B_0, B_1, $\ldots$, B_k қалалары әр түрлі болуы міндетті емес. Оның үстіне A_0 және A_k қалаларының әрбірі үшінші қаламен қосылған, сәйкесінше $C_0 \neq B_0$ және $C_k \neq B_k$.

Егер B_i немесе C_i қалаларының кейбіреуі A_j-ге сәйкес келсе, онда A_i-дан A_j-ке (немесе керісінше) тікелей өту арқылы қысқа жол табуға болады. Қарама-қайшылық. Демек,B_i немесе C_i қалаларының ешқайсысы A_j қалаларының ешқайсысымен сәйкес келмейді.

B_i-дің қаласының бірі A_j-дің төрт қаласымен қосылсын дейік, айталық A_i, A_m, A_n және A_p ($i < m < n < p$). Онда біз A_i-дан B_i-ге өтіп, содан кейін A_p -ға барып , жолды қысқарта аламыз.

INTERNATIONAL MATHEMATICS, PHYSICS AND COMPUTER SCIENCE TEACHERS OLYMPIAD

Mathematics. Olympiad trainers league

You are offered two sets of problems:

I. *«Mathematical Set»» (**problems №1–№3** to solve).*

II. *«Methodical Set» (**problems №5 — №7**, includes tasks simulating a Math Olympiad trainer professional activity).*

*Time allowed: 4 **hours**.*

*Each problem is worth **10 points**.*

I. *Mathematical Set*

1. Equation. Find the set of all quadruplets (x, y, z, t) of real numbers which satisfy

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{2(1+x)}{xy} + \frac{3(1+x)(2+y)}{xyz} + \frac{4(1+x)(2+y)(3+z)}{xyzt} = 0.$$

2. GCD. Let n be a positive integer. Determine the maximum value of

$$\mathrm{GCD}(a, b) + \mathrm{GCD}(b, c) + \mathrm{GCD}(c, a)$$

for positive integers a, b and c, such that $ab + bc + ca = 5n$.

3. Geometry. Let ABC be an acute triangle with circumcenter O. Point Q lies on the circumcircle of triangle BOC and OQ is a diameter of this circle. Point M lies on CQ and point N lies on the interior of the line segment BC in such a way that $ANCM$ is a parallelogram. Show that the circumcircle of triangle BOC and the lines AQ and NM are concurrent.

II. *Methodical Set*

4. Angle Bisector. Give four different proofs of the proposition below:

Proposition

If AL is the angle bisector of triangle ABC, then

$$AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot CL.$$

5. **Searching for mistakes.** The following problem was proposed at Mathematical Olympiad:

Problem

$f : \mathbb{R} \to \left[\frac{1}{2022}, 2022\right]$ is a function satisfying the following condition

$$f(f(x)) = x^2 f(x) - x + 1$$

for all $x \in \mathbb{R}$. Find all possible values of $f(1)$.

Below you can find **«solution»** to the problem given by a student. The «solution» may contain mathematical mistakes. If the student's «solution» is incorrect, then indicate all the mistakes and give the correct solution.

Student's «solution»

«Solution». *Let us denote the equation $f(f(x)) = x^2 f(x) - x + 1$ by $P(x)$.*

Considering $P(1)$ we get

$$f(f(1)) = f(1).$$

Hence

$$f(f(f(1))) = f(f(1)) = f(1).$$

Using $P(f(1))$ we get:

$$\begin{gathered} f(f(f(1))) = (f(1))^3 - f(1) + 1; \\ f(1) = (f(1))^3 - f(1) + 1; \\ (f(1))^3 - f(1) - f(1) + 1 = 0; \\ f(1)(f(1) - 1)(f(1) + 1) - (f(1) - 1) = 0; \\ (f(1) - 1)((f(1))^2 + f(1) - 1) = 0. \end{gathered}$$

Finally, we obtain

$$(f(1) - 1)((f(1))^2 + f(1) - 1) = 0 \iff$$

$$\left[\begin{array}{l} f(1) - 1 = 0, \\ (f(1))^2 + f(1) - 1 = 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} f(1) = 1, \\ f(1) = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

«Answer»: $1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

6. Coordination. The following problem was proposed at Mathematical Olympiad:

Problem

In a country, there are 2022 cities, some of which are connected by roads. Each city is connected to at least three other cities. It is possible to travel from any city to any other city using one or more roads. For each pair of cities, consider the shortest route between these two cities. What is the greatest number of roads that can be on such a shortest rout?

Below you can find a **«partial solution»** to the problem given by a student. Using the result obtained by the student, complete the solution of the problem. Specify your proposals at the coordination, with justification, for a possible assessment of the student's «partial solution» (full correct solution, as normal, is worth 7 **points**).

Student's «partial solution»

Consider the shortest route between two cities A_0 and A_k which consist of k roads and visits the cities A_1, A_2, …, A_{k-1} consecutively. Each of the cities A_i has one or more neighbour besides A_{i-1} u A_{i+1} which we call B_i (note that the cities B_0, B_1, …, B_k do not have to be distinct). Moreover, A_0 and A_k are connected to a third city, say $C_0 \neq B_0$ and $C_k \neq B_k$ respectively.

If one of the cities B_i or C_i equals one of the cities A_j, then we could have found a shorter route by going directly from A_i to A_j (or vice versa), which would be a contradiction. Hence the cities B_i and C_i are not equal to any of the cities A_j.

If one of the cities B_i is connected to four cities A_j, say B_i is connected to A_i, A_m, A_n and A_p ($i < m < n < p$), then we can shorten the route by going from A_i to B_i and then to A_p.

Математика. Лига тренеров

Вам предлагаются два блока заданий:

I. *«Математический блок» (**задачи №1–№3** для решения).*

II. *«Методический блок» (**задачи №4–№6**, включает в себя задания, моделирующие повседневную работу тренера олимпийского резерва).*

*Продолжительность конкурса: **4 часа**.*

*Каждое задание оценивается в **10 баллов**.*

I. *Математический блок*

1. Уравнение. Найти все четвёрки действительных чисел (x, y, z, t), удовлетворяющие уравнению

$$1+\frac{1}{x}+\frac{2(1+x)}{xy}+\frac{3(1+x)(2+y)}{xyz}+\frac{4(1+x)(2+y)(3+z)}{xyzt}=0.$$

2. НОД. Для заданного целого положительного числа n определите наибольшее возможное значение

$$\text{НОД}(a,b)+\text{НОД}(b,c)+\text{НОД}(c,a)$$

для всех целых положительных чисел a, b и c таких, что $ab+bc+ca=5n$.

3. Геометрия. Пусть точка O является центром окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC. Точка Q лежит на окружности, описанной около треугольника BOC, причём OQ — диаметр этой окружности. На прямой CQ выбрана точка M, а на отрезке BC выбрана точка N так, что четырёхугольник $ANCM$ — параллелограмм. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BOC, а также прямые AQ и NM пересекаются в одной точке.

II. *Методический блок*

4. Биссектриса. Приведите четыре различных способа доказательства утверждения:

Утверждение

Пусть AL — биссектриса треугольника ABC, тогда

$$AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot CL.$$

5. Поиск ошибок. На математической олимпиаде была предложена задача:

Задача

Функция $f : \mathbb{R} \to \left[\frac{1}{2022}, 2022\right]$ удовлетворяет условию

$$f(f(x)) = x^2 f(x) - x + 1$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. Найдите все возможные значения $f(1)$.

Ниже приведено **«решение» ученика**, которое может содержать математические ошибки. Если «решение» ученика неверно, то укажите все ошибки и приведите верное решение.

«Решение» ученика

«Решение». *Обозначим равенство* $f(f(x)) = x^2 f(x) - x + 1$ *через* $P(x)$.

Рассмотрим $P(1)$:

$$f(f(1)) = f(1).$$

Отсюда

$$f(f(f(1))) = f(f(1)) = f(1).$$

Теперь рассмотрим $P(f(1))$:

$$\begin{gathered}
f(f(f(1))) = (f(1))^3 - f(1) + 1;\\
f(1) = (f(1))^3 - f(1) + 1;\\
(f(1))^3 - f(1) - f(1) + 1 = 0;\\
f(1)(f(1) - 1)(f(1) + 1) - (f(1) - 1) = 0;\\
(f(1) - 1)((f(1))^2 + f(1) - 1) = 0.
\end{gathered}$$

Таким образом,

$$(f(1) - 1)((f(1))^2 + f(1) - 1) = 0 \iff$$

$$\left[\begin{array}{l} f(1) - 1 = 0, \\ (f(1))^2 + f(1) - 1 = 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} f(1) = 1, \\ f(1) = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

«Ответ»: $1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

6. **Координация.** На математической олимпиаде была предложена задача:

Задача

В некоторой стране 2022 города, некоторые из которых соединены дорогами. Каждый город соединён по крайней мере с тремя другими городами. По этим дорогам можно добраться из любого города страны в любой другой город (возможно, проезжая через другие города). Для любых двух городов определили самый крайтчайший путь между двумя городами. Какое наибольшее число дорог может быть в этом кратчайшем маршруте?

Ниже приведено **«частичное решение»** ученика. Покажите как, используя полученный этим учеником результат, закончить решение задачи. Укажите возможные Ваши предложения с обоснованием по оценке стоимости продвижения ученика на координации (за полное решение задачи на олимпиаде давалось, как обычно, 7 **баллов**).

«Частничное решение» ученика

Рассмотрим наикратчайший маршрут между двумя городами, в котором ровно k дорог. Пусть этот маршрут соединяет города A_0 и A_k и проходит через города $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$. Каждый город A_i соединён дорогой хотя бы ещё с одним городом страны, кроме A_{i-1} и A_{i+1}. Назовём его B_i (заметим, что города $B_0, B_1, \ldots, B_k$ не обязательно все различны). Более того, каждый из городов A_0 и A_k соеденины ещё и с третьим городом, соответственно с $C_0 \neq B_0$ и $C_k \neq B_k$.

Если какой-то из городов B_i или C_i совпадает с A_j, тогда можно найти более короткий путь, переходя непосредственно из A_i в A_j (или в обратном направлении). Противоречие. Значит, ни один из городов B_i или C_i не совпадает ни с каким из городов A_j.

Пусть один из городов B_i соединён с четырьмя городами A_j, допустим с A_i, A_m, A_n и A_p $(i < m < n < p)$. Тогда мы сможем укоротить маршрут, переходя из A_i в B_i, а затем в A_p.