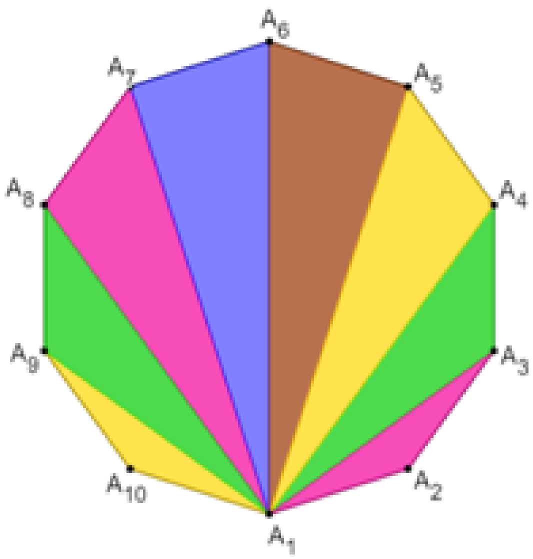
IV МЕЖДУНАРОДНЫЙ ОТКРЫТЫЙ ТВОРЧЕСКИЙ КОНКУРС УЧИТЕЛЕЙ И ТРЕНЕРОВ ОЛИМПИЙСКОГО РЕЗЕРВА МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ И ИНФОРМАТИКИ – IMPACT OLYMPIAD

Математика. Лига учителей

Условия, решения, комментарии и критерии проверки

I. Математический блок.

1. Десятиугольник. Дан правильный десятиугольник.Он разбит на треугольники, как показано на рисунке.Докажите, суммы площадей треугольников, покрашенных в один цвет, равны $\frac{1}{5}$ площади всего десятиугольника.



Решение №1. Пусть сторона десятиугольника равна a, диагональ $A_1A_5 = d$. Так как $A_1A_5A_6A_{10}$ является прямоугольников, то $\angle A_1A_5A_6 = 90^o$. Следовательно, $S_{A_1A_5A_6} = S_{A_1A_6A_7} = 0{,}5ad$ В силу симметрии десятиугольника $S_{A_1A_9A_{10}} = S_{A_1A_2A_3}$ и $S_{A_1A_7A_8} = S_{A_1A_4A_5}$, тогда отсюда следует, что

$$S_{A_1A_7A_8} + S_{A_1A_9A_{10}} = S_{A_1A_7A_8} + S_{A_1A_2A_3} = S_{A_1A_4A_5} + S_{A_1A_9A_{10}} = 0{,}5a(d_1 + d_2)$$

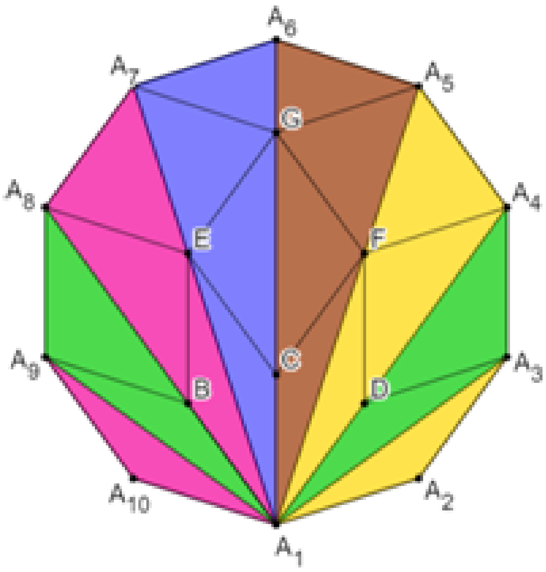
где d_1- высота, опущенная из вершины A_1 на сторону A_9A_{10}, а d_2 - высота, опущенная из вершины A_1 на сторону A_5A_4. Так как стороны A_5A_4 и A_9A_{10} противолежат друг другу, то

$$d_1 + d_2 = d \implies S_{A_1A_7A_8} + S_{A_1A_9A_10} = S_{A_1A_4A_5} + S_{A_1A_2A_3} = 0{,}5ad$$

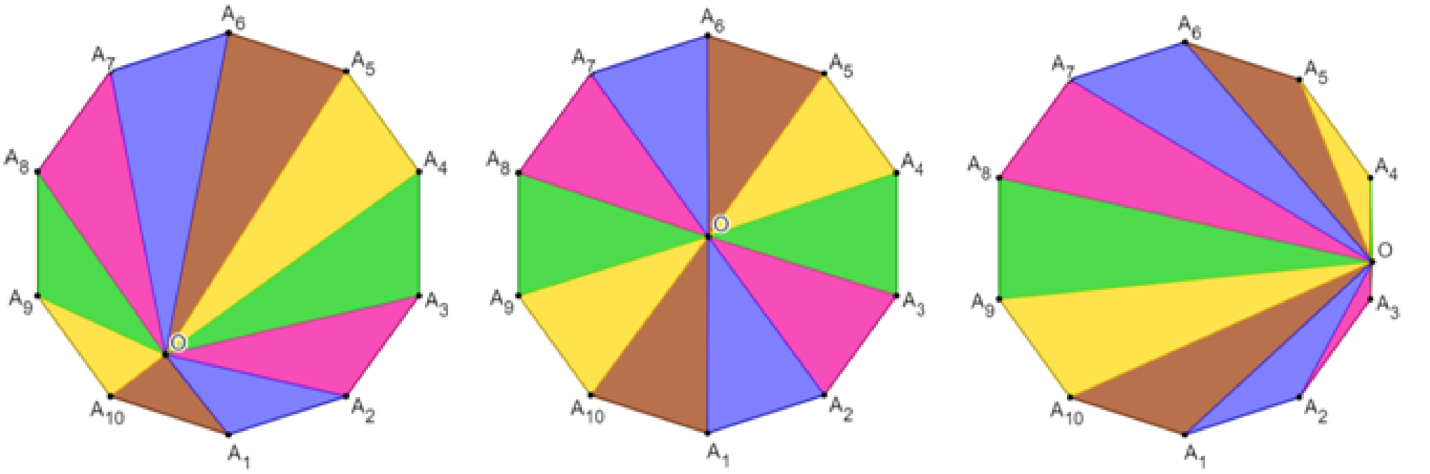
Аналогично, $S_{A_1A_8A_9} + S_{A_1A_3A_4} = 0{,}5ad$. Площадь всего десятиугольника равна

$$S = S_{A_1A_5A_6} + S_{A_1A_6A_7} + S_{A_1A_7A_8} + S_{A_1A_9A_{10}} + S_{A_1A_4A_5} + S_{A_1A_2A_3} + S_{A_1A_8A_9} + S_{A_1A_3A_4} = 2{,}5ad$$

откуда $S_{A_1A_5A_6} = S_{A_1A_6A_7} = S_{A_1A_7A_8} + S_{A_1A_9A_{10}} = S_{A_1A_4A_5} + S_{A_1A_2A_3} = S_{A_1A_8A_9} + S_{A_1A_3A_4} = 0{,}5ad = 0{,}2S$ Что и требовалось доказать.



Решение №2. Пусть сторона десятиугольника равна a. Разобьем данный десятиугольник на треугольники, как показано на рисунке, так что $A_1B = A_1C = A_1D = BE = CF = a$.Тогда $\Delta A_1A_9A_{10} = \Delta A_1A_9B$ по двум сторонам и углу между ними.Следовательно, $A_9B = A_9A_10 = a$ и $\angle A_1A_{10}A_9 = \angle A_1BA_9$.Аналогично доказывается, что $\Delta A_1BE = \Delta A_1CE = \Delta A_1CF = \Delta A_1DF = \Delta A_1DA_3 = \Delta A_1A_2A_3$, откуда $\angle A_1BE = \angle A_1CE = \angle A_1CF = \angle A_1DF = \angle A_1DA_3 = \angle A_1A_2A_3$ и $BE = CE = CF = = DF = DA_3 = a$, а также $\angle A_1BE = \angle A_1CE = \angle A_1CF = \angle A_1DF = \angle A_1DA_3 = \angle A_1A_2A_3$. Далее по тому же признаку равенства треугольников доказываем, что $\Delta BA_9A_8 = \Delta BEA_8 = \Delta CEG = \Delta CFG = \Delta DFA_4 = \Delta DA_3A_4$ $\Delta EA_8A_7 = \Delta EGA_7 = \Delta FGA_5 = \Delta FA_4A_5$; $\Delta GA_7A_6 = \Delta GA_5A_6$, отсюда следует, что $EA_8 = EG = FG = DF = FA_4 = GA_7 = GA_5 = a$ и $\angle BA_9A_8 = \angle BEA_8 = \angle CEG = = \angle CFG = \angle DFA_4 = \angle DA_3A_4$ и $\angle EA_8A_7 = \angle EGA_7 = \angle FGA_5 = \angle FA_4A_5$; $\angle GA_7A_6 = = \angle GA_5A_6$. Маленькие ромбы $A_1BA_9A_{10}$, A_1BEC, A_1CFD, $A_1DA_3A_2$ и $A_5A_6A_7G$ равны между собой и делятся диагоналями на равновеликие треугольники. Покажем, что оставшиеся треугольники также имеют равные площади. Внутренние углы правильного десятиугольника равны $144^o = 0{,}8\pi$. Острые углы маленьких ромбов $A_1BA_9A_{10}$, A_1BEC, A_1CFD, $A_1DA_3A_2$ при вершине A_1 равны $0{,}25 \cdot 0{,}8\pi = 0{,}2\pi$. Значит тупые углы этих ромбов равны $\pi - 0{,}2\pi = 0{,}8\pi$. Острые углы больших ромбов BEA_8A_9, $CEGF$, DEA_4A_3 при вершинах B,C,D равны $2(\pi - 0{,}8\pi) = 0{,}4\pi$. Тогда острые углы ромбов A_8A_7GE и FGA_5A_4 равны $0{,}8\pi - 0{,}4\pi = 0{,}4\pi$. Следовательно, все большие ромбы равны между собой и также делятся диагоналями на равновеликие треугольники.Все фигуры одинакового цвета состоят из двух половин маленьких ромбов и двух половин больших ромбов. Всего использовано 5 цветов, значит площади фигур одного цвета равны $\frac{1}{5}$ площади всего десятиугольника.



Замечание. На самом деле, применяя этот способ для более общего случая, когда точка схождения треугольников находится в любом месте внутри десятиугольника. Разместив эту точку в вершине десятиугольника A_1, мы получим решение поставленной задачи.

Критерии проверки:

1. Доказано, что $S_{A_1A_6A_7} = S_{A_1A_5A_6} = 0{,}2S$ -**2 балла.**

   Частичные баллы:

   - ***1 балл*** *- найдены площади треугольников* $A_1A_6A_7$ *и* $A_1A_5A_6$*;*
   - ***1 балл*** *- доказано равенство* $S_{A_1A_6A_7} = S_{A_1A_5A_6} = 0{,}2S$.

2. Доказано, что $S_{A_1A_8A_9} + S_{A_1A_3A_4} = 0{,}2S$ -**3 балла.**

   Частичные баллы:

   - ***2 балла*** *- найдены площади треугольников* $A_1A_8A_9$ *и* $A_1A_3A_4$*;*
   - ***1 балл*** *- доказано равенство* $S_{A_1A_8A_9} + S_{A_1A_3A_4} = 0{,}2S$.

3. Доказано, что $S_{A_1A_9A_{10}} + S_{A_1A_7A_8} = 0{,}2S$ - **5 баллов.**

   Частичные баллы:

   - ***2 балла*** *- найден площадь треугольника* $A_1A_9A_{10}$ *;*
   - ***2 балла*** *- найден площадь треугольника* $A_1A_7A_8$*;*
   - ***1 балл*** *- доказано равенство* $S_{A_1A_9A_{10}} + S_{A_1A_7A_8} = 0{,}2S$.

2. Экзамен. Асхат, Батыр и Канат сдали несколько экзаменов. На каждом экзамене выставлялась только одна из отметок A,B и C, где A,B,C -целые положительные числа. В итоге Асхат набрал 20 баллов, Батыр - 10 баллов, Канат - 9 баллов. Если Батыр был лучшим на первом экзамене, то кто был вторым на втором экзамене?

Ответ: Канат.

	I	**II**	**II**	
Асхат	4	8	8	**20**
Батыр	8	1	1	**10**
Канат	1	4	4	**9**

Решение. Заметим, что сумма баллов всех экзаменов кратно количеству экзаменов (так как на каждом экзамене выставлялось одно и то же количество баллов) и равна 39. А поскольку Канат получил 9 баллов, то экзаменов было не более 9. Отсюда, количество экзаменов равно 3, среди делителей числа 39, $(3; 13; 39)$, отличных от 1, только число 3 меньше 9. Для определенности, не теряя общности, пусть $A \geq B \geq C$. Заметим, что за три экзамена каждая из оценок A,B,C была выставлена ровно три раза, значит $3A+3B+3C = 20+10+9 = 39$. То есть $A+B+C = 13$, отсюда следует, что $A \geq 5$. Аналогично $C \leq 4$. Ясно, что Батыр не мог получить две оценки A, следовательно, он получил только одну оценку A. Отсюда, $A \leq 8$, так как Батыр получил 10 баллов и $C \geq 1$. Если $A \leq 6$, то Асхат получил бы не более 18, а по условию он получил 20. Поэтому $A = 7$ или 8. Если $A = 7$, то сумма двух оценок равна 3 балла, последнее возможно только если $B = 2, C = 1$. Однако в этом случае у Асхата либо не более $7+7+2 = 16$, либо не меньше $7+7+7$, что не соответствует условию задачи. Поэтому $A = 8$. Тогда сумма двух оценок Батыра равна 2, значит, $C = 1$, то есть на втором и третьем экзамене у Батыра были самые плохие оценки. Следовательно, $B = 13 - 8 - 1 = 4$. Понятно, что Асхат получил $8, 8$ и 4. Следовательно, на втором и третьем экзамене лучшим был Асхат. Таким образом, на втором экзамене оценку B получил Канат.

Критерии проверки:

1. Доказано, что количество экзаменов равно 3 - **2 балла.**

2. Доказано, что $A + B + C = 13$ - **1 балл.**

3. Доказано, что $A \leq 8$ - **1 балл.**

4. Доказано, что $A \geq 7$ - **1 балл.**

5. Доказано, что $A = 8$ - **2 балла.**

6. Доказано, что $C = 1$ - **1 балл.**

7. Получен правильный ответ - **2 балла.**

3. НОД.Назовем пару чисел $(a;b)$ *хорошими*, если НОД$(a;b) > 1$. Сколько *хороших* пар можно составить из всех делителей числа 2023^4?

Ответ: 914.

Решение. Разложим число 2023^4 на простые множители: $\boxed{2023^4 = 7^4 \cdot 17^8}$. Всего делителей числа 2023^4 будет $\boxed{(4+1)(8+1) = 45}$. Тогда пар делителей будет $\boxed{C_{45}^2}$.

Сначала подсчитаем количество «нехороших» пар, то есть пар взаимно простых чисел (НОД$(a;b) = 1$). Очевидно, что такие пары должны иметь вид $(7^n;17^m)$ или $(1;7^l \cdot 17^k)$, где $n \in \{1,2,3,4\}, m \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, l \in \{0,1,2,3,4\}, k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Каждой паре $(7^n;17^m)$ соответствует единственная упорядоченная пара $(n;m)$. Число n можем выбрать 4 способами, а число m можем выбрать 8 способами. Значит, упорядоченную пару $(n;m)$ можно выбрать $\boxed{4 \times 8 = 32}$ способами.

Каждой паре $(1;7^l \cdot 17^k)$ соответствует единственная упорядоченная пара $(l;k)$. Число l можем выбрать 5 способами, а число k можем выбрать 9 способами. Поскольку пару $(1;1)$ мы можем получить дважды, то упорядоченную пару $(l;k)$ можно выбрать $\boxed{5 \times 9 - 1 = 44}$ способами. Тогда количество «нехороших» пар всего $\boxed{32 + 44 = 76}$. Следовательно, $\boxed{C_{45}^2 - 76 = 990 - 76 = 914}$.

Примечание. Поскольку, в условии в паре чисел $(a;b)$ не было оговорено $a \neq b$ или $a = b$, то ответ $914 + 44 = 958$, полученный при условии $a \neq b$, считается правильным.

Критерии проверки

1. За разложение на простые делители $\boxed{2023^4 = 7^4 \cdot 17^8}$- **1 балл.**
2. Подсчет количество делителей $\boxed{(4+1)(8+1) = 45}$ -**1 балл.**
3. Подсчет всевозможных пар $\boxed{\mathrm{C}_{45}^2 = 990}$- **1 балл.**
4. Идея считать количество *хороших пар* через количество *не хороших пар* - **1 балл.**
5. Идея разделить количества *нехороших пар* на два класса - **1 балл.**
   (a) Когда в паре один из делителей является кратным 7, а другой кратным 17.
   (b) Когда в паре один из делителей равен единице.
6. Подсчет пар класса (a) $\boxed{= 32}$- **2 балла.**
7. Подсчет пар класса (б) $\boxed{= 44}$ - **2 балла.**
8. Получен правильный ответ (в случае $a \neq b$ - 914 пар, в случае $a = b$ - 958 пар) $\boxed{= 990 - 44 - 32 = 914}$- **1 балл.**

3. Система. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 81(x^2+xy+y^2)(x^2y^2+xy+1)=49(x+y)^2(1+xy)^2 \\ (x^2-xy+y^2)(x^2y^2-xy+1)=9(x-y)^2(1-xy)^2 \end{cases}$$

Ответ:

$$\left\{(0;0);(2;1);(-2;-1);(1;2);(-1;-2);\left(\frac{1}{2};1\right);\left(-\frac{1}{2};-1\right)\left(1;\frac{1}{2}\right);\left(-1;-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

Решение. Если $x=0$, то $y=0$. Значит $(0;0)$ является решением системы. Тогда разделим обе части уравнения на xy. Следовательно, получим систему уравнении

$$\begin{cases} 81\left(\frac{x}{y}+1+\frac{y}{x}\right)\left(xy+1+\frac{1}{xy}\right)=49\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)\left(xy+2+\frac{1}{xy}\right) \\ \left(\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}\right)\left(xy-1+\frac{1}{xy}\right)=9\left(\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}\right)\left(xy-2+\frac{1}{xy}\right) \end{cases}$$

Введем замену: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=u, \quad xy+\frac{1}{xy}=v$.

$$\begin{cases} 81(u+1)(v+1)=49(u+2)(v+2) \\ (u-1)(v-1)=9(u-2)(v-2) \end{cases} \implies \begin{cases} 32uv-17u-17v-115=0 \\ 8uv-17u-17v+35=0 \end{cases} \iff$$

$$\implies \begin{cases} 24uv=150 \\ 51u+51v=255 \end{cases} \implies \begin{cases} 4uv=25 \\ u+v=5 \end{cases}$$

$$(u-v)^2=(u+v)^2-4uv=5^2-25=0 \implies u=v=\frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2} \\ xy+\frac{1}{xy}=\frac{5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2-5xy+2y^2=0 \\ 2x^2y^2-5xy+2=0 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{5\pm3}{4} \\ xy=\frac{5\pm3}{4} \end{cases}$$

Случай №1.

$$\begin{cases} x=2y \\ xy=2 \end{cases} \implies \{(2;1);(-2;-1)\}.$$

Случай №2.

$$\begin{cases} 2x=y \\ xy=2 \end{cases} \implies \{(1;2);(-1;-2)\}.$$

Случай №3.

$$\begin{cases} x=2y \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases} \implies \left\{\left(\frac{1}{2};1\right);\left(-\frac{1}{2};-1\right)\right\}.$$

Случай №4.

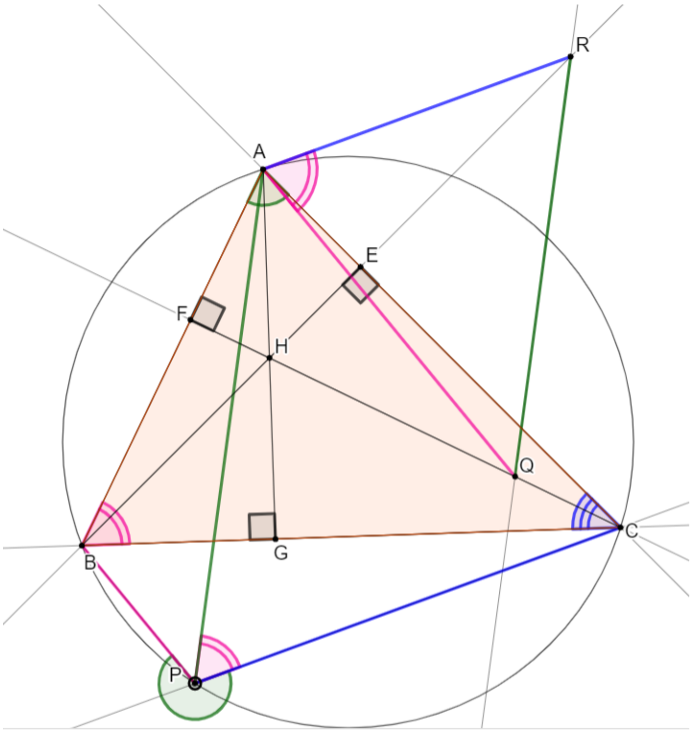
$$\begin{cases} 2x=y \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases} \implies \left\{\left(1;\frac{1}{2}\right);\left(-1;-\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

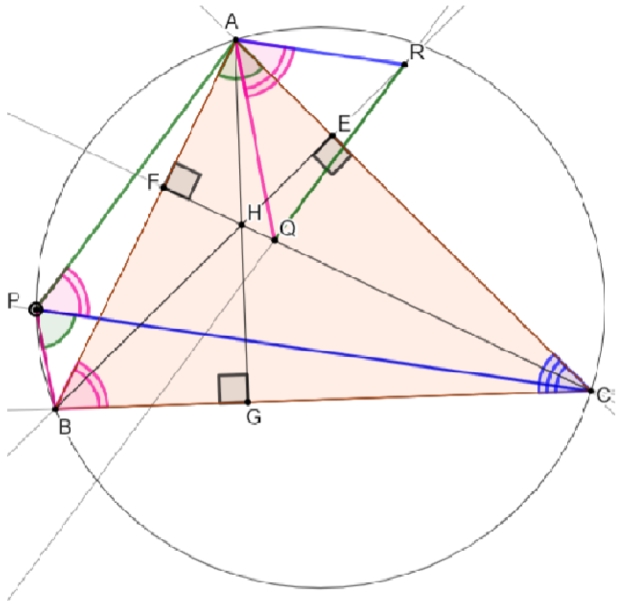
Критерии проверки:

Рассматривалось решения, отличные от предложенных. Они оценивалось по продвижению к окончательному ответу и обоснованием всех необходимых фактов.

1. **1 балл** – показано, что $(0;0)-$ решения системы
2. **4 балла** – корректно введена замена и решена система относительно u,v
3. **1 балл** – корректно осуществлен возврат к исходным переменным
4. **4 балла** – по 1 баллу за каждую соответствующий пару симметричных решений

4. Параллельность. Пусть ABC — треугольник с ортоцентром H, а точка P — точка описанной окружности. Прямая, проходящая через A, параллельная BP, пересекает CH в точке Q, а прямая, проходящая через A, параллельная CP, пересекает BH в точке R. Докажите, что $QR \parallel AP$.





Решение. Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ и $\angle C = \gamma$, тогда $\angle BHF = 90^o - \angle ABH = 90^o - (90^o - \angle A) = \alpha$. Аналогично, $\angle AHF = \beta$. Из равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, следует, что $\angle APC = \angle B = \beta$ и $\angle APB = \angle C = \gamma$. Тогда $\angle BPC = \gamma + \beta$. С другой стороны, $\angle PAT = \angle APB = \gamma$, так как AT и BP параллельны. Также $\angle RAT = \beta + \gamma$, так как $AR \parallel BC$ и $AT \parallel PB$. Тогда $\angle RAQ = \alpha$. Заметим, что углы RAQ и RHA равны опираются на отрезок QR. Тогда четырехугольник $AHRQ$ является вписанным. Следовательно, $\angle AQR = 180^o - \angle AHR = 180^o - (\alpha + \beta) = \gamma$. Учитывая, что $\angle AQR = \angle PAT = \gamma$, получим требуемое.

Критерии проверки:

1. Правильный чертеж - **1 балл.**

2. Свойства вписанных углов, свойства паралелльности - **1 балл.**

3. Сумма острых углов прямоугольного треугольника - **1 балл.**

4. Обоснование существования описанного четырехугольника - **5 баллов.**

5. Признак паралельности - **2 балла.**

II. Методический блок.

В задачах №6-№7 приведено **«решение» ученика**, которое может содержать математические ошибки. Если **«решение» ученика** неверно, то укажите все ошибки и приведите верное решение.

6. Последовательность.

Задача.

Пусть $\{a_n\}$ последовательность, определяемая следующим образом:

$$a_1 = 1, \quad a_n = a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \ldots + \frac{1}{n-1}a_{n-1} \quad \text{при } n \geq 2.$$

Найдите n, если $a_n = 2023$.

«Решение» ученика. Заметим, что $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n-1}a_{n-1}$. Отсюда следует, что $a_n : a_{n-1} = n : (n-1)$ для каждого $n \geq 2$. Тогда $a_2 : a_1 = 2 : 1$, $a_3 : a_2 = 3 : 2$, $a_4 : a_3 = 4 : 3$, ... $a_n : a_{n-1} = n : (n-1)$. Перемножая эти равенства получим $a_n : a_1 = n$, откуда $a_n = a_1 \cdot n = n$. Следовательно, $n = a_n = 2023$.

Ошибка №1. Ученик не доказал утверждение $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n-1}a_{n-1}$

Ошибка №2. $a_n : a_{n-1} = n : (n-1)$ при $\boxed{n \geq 2}$, должно быть $n \geq 3$.

Исправление ошибки №1.

$$a_n - a_{n-1} = \left(a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \ldots + \frac{1}{n-1}a_{n-1}\right) -$$

$$-\left(a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \ldots + \frac{1}{n-2}a_{n-2}\right) = \frac{1}{n-1}a_{n-1}, \qquad \boxed{n \geq 3}$$

Исправление ошибки №2.

$$\frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n}{2}$$

$$\frac{a_n}{a_2} = \frac{n}{2}$$

Следовательно, $n = 2a_n : a_2 = 2a_n = 2 \cdot 2023 = 4046$.

Критерии проверки

1. За найденные ошибки - **4 балла.**

   Частичные баллы:

   - Указана **ошибка №1 - 1 балл.**
   - Указана **ошибка №2 - 3 балла.**

2. Исправление ошибок - **6 баллов.**

   Частичные баллы:

- Исправление **ошибки №1 - 2 балла.**
- Исправление **ошибки №2 - 4 балла.**

Или **альтернативное** решение:

Частичные баллы:

- Найдена закономерность - **2 балла.**
- Закономерность доказана - **3 балла.**
- Правильный ответ - **1 балл.**

7. Параллелепипед.

Задача.

Найти наибольшее значение площади боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда,если площадь его основания равна 1,а длина диагонали равна 2.

«Решение» ученика. Обозначим длины сторон основания через a и b, длину бокового ребра через c. Тогда площадь S боковой поверхности будет равна $2(a+b)c$. Итак, нам нужно найти наибольшее значение выражения $S = 2(a+b)c$. Из условия вытекает, что измерения параллелепипеда a,b и c связаны равенствами $ab = 1$ и $a^2+b^2+c^2 = 4$.Из этих равенств следует, что $(a+b)^2+c^2 = 6$ или $a+b = \sqrt{6-c^2}$.Тогда $S(c) = 2(a+b)c = 2c\sqrt{6-c^2}$. Возьмем производную: $S'(c) = \frac{12-4c^2}{\sqrt{6-c^2}}$ По смыслу обозначений $c > 0$. Поэтому будем искать наибольшее значение функции $S = S(c)$ на промежутке $[0; \sqrt{6}]$. В точке $\sqrt{3}$ функция имеет максимум: $S_{max}(\sqrt{3}) = 6$.

Комментарий. Условие «задачи» корректно, а «Ответ» и «Решение» неверные. Условие $(a+b)^2+c^2 = 6$ вытекает из условий $ab = 1$, $a^2+b^2+c^2 = 4$, но вовсе не равносильно им. Можно заметит, что из условий $ab = 1$ и $a^2+b^2+c^2 = 4$ следует, что $c^2 \leq 2$. Так как $4-c^2 = a^2+b^2 \geq 2ab = 2$, то есть $c^2 \leq 2$. Поэтому будем искать наибольшее значение функции $S = S(c)$ на промежутке $[0; \sqrt{2}]$. Следовательно, $S_{max}(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$.

Критерии проверки:

1. Указаны ошибки - **3 балла.**
2. Приведено полное обоснованное решение - **7 баллов**

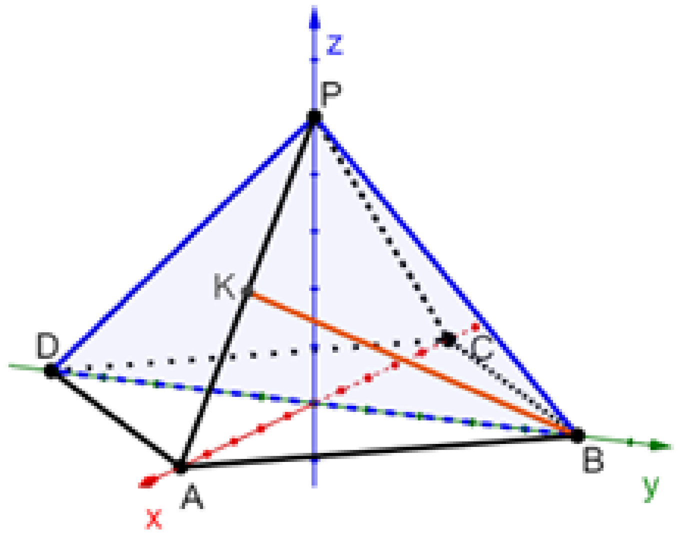
8. Стереометрия.

Решите предлагаемую ниже задачу как можно большим количеством способов.

Задача.

Длины всех ребер правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P равны между собой. Точка K-середина бокового ребра пирамиды AP. Найдите угол между прямой BK и плоскостью BDP.

Решение.

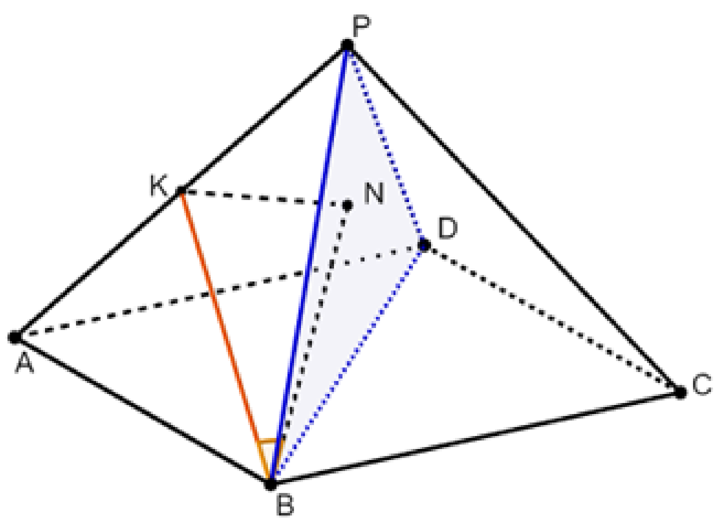


Способ №1. *(Метод координат)* Введем прямоугольную декартову систему координат в пространстве (ПДСК). Во введенной системе координат вершин призмы имеют координаты: $A(a;0;0), B(0;a;0), C(-a;0;0), D(0;-a;0), P(0;0;a), K(0{,}5a;0;0{,}5a)$. Координаты нормального вектора плоскости (BDP) : $\vec{n}=(1;0;0)$ Координаты направляющего вектора прямой BK: $\vec{s}=(0{,}5a;-a;0{,}5a)$. Тогда

$$\sin\angle((BDP);BK)=\frac{|1\cdot0{,}5a+0\cdot(-a)+0\cdot0{,}5a|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{(0{,}5a)^2+(-a)^2+(0{,}5a)^2}}=\frac{0{,}5a}{1\cdot0{,}5\sqrt{6}a}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Отсюда следует, что

$$\angle((BDP);BK)=arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}.$$



Способ №2. *(Векторный метод)* Введем базисные векторы $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{c}$, $AB = a$ и составим таблицу умножения векторов:

	$\overrightarrow{a}$	$\overrightarrow{b}$	$\overrightarrow{c}$
$\overrightarrow{a}$	a^2	$\frac{a^2}{2}$	0
$\overrightarrow{b}$	$\frac{a^2}{2}$	a^2	$\frac{a^2}{2}$
$\overrightarrow{a}$	0	$\frac{a^2}{2}$	a^2

Пусть $\overrightarrow{KN} \perp (BPD)$ $((N \in (BPD))$. Тогда

$$\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BN} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BP}\right) + x \cdot \overrightarrow{BP} + y \cdot \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b} + x \cdot \overrightarrow{b} + y\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + y\right)\overrightarrow{a} + \left(-\frac{1}{2} + x\right)\overrightarrow{b} + y\overrightarrow{c}.$$

Поскольку $\overrightarrow{KN} \perp \overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{KN} \perp \overrightarrow{BD}$ то $\overrightarrow{KN} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$, $\overrightarrow{KN} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ или

$$\begin{cases} \left(\left(-\frac{1}{2} + y\right)\overrightarrow{a} + \left(-\frac{1}{2} + x\right)\overrightarrow{b} + y\overrightarrow{c}\right) \cdot \overrightarrow{b} = 0, \\ \left(\left(-\frac{1}{2} + y\right)\overrightarrow{a} + \left(-\frac{1}{2} + x\right)\overrightarrow{b} + y\overrightarrow{c}\right) \cdot \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}\right) = 0; \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(\left(-\frac{1}{2} + y\right)\frac{a^2}{2} + \left(-\frac{1}{2} + x\right)a^2 + y\overrightarrow{c}\right) \cdot \frac{a^2}{2} = 0, \\ \left(-\frac{1}{2} + y\right)a^2 + \left(-\frac{1}{2} + x\right) \cdot \frac{a^2}{2} + \left(-\frac{1}{2} + x\right) \cdot \frac{a^2}{2} + a^2 y = 0; \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} + \frac{y}{2} - \frac{1}{2} + x + \frac{y}{2} = 0, \\ -\frac{1}{2} + y - \frac{1}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{x}{2} + y = 0; \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\overrightarrow{KN} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\overrightarrow{a} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{b} + \frac{1}{4}\overrightarrow{c} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{1}{4}\overrightarrow{c}$$

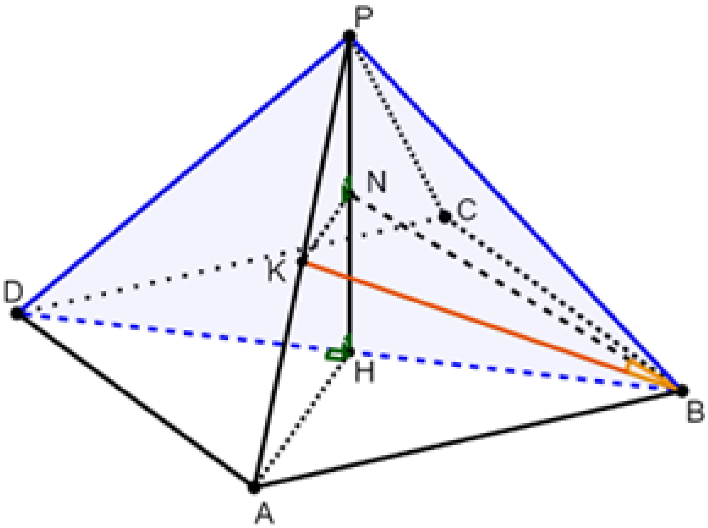
$$\|\overrightarrow{KN}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{1}{4}\overrightarrow{c}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{\left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$\|\overrightarrow{BK}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\overrightarrow{KN} \cdot \overrightarrow{BK} = \left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{1}{4}\overrightarrow{c}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) = \frac{a^2}{8}$$

$$\cos\angle(BK; KN) = \frac{\frac{a^2}{8}}{\frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \Longrightarrow$$

$$\angle(BK; KN) = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{\sqrt{6}}{6} = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$$



Способ №3. *(Геометрический способ)* Пусть PH - высота пирамиды $PABCD$, отрезок KN- средняя линия треугольника APH. Поскольку $PABCD$- правильная пирамида, точка H- центр квадрата $ABCD$, значит, AH и $AH \perp PH$, откуда $AH \perp (BDP)$. Но, $KH \parallel AH$ следовательно, $KN \perp (BDP)$. Прямая BN- проекция прямой BK на плоскость BDP, значит, угол между прямой BK и плоскостью BDP равен углу между прямой BK и прямой BN, то есть острому углу KBN прямоугольного треугольника KBN. Примем длину ребра данной пирамиды за а, тогда медиана равностороннего треугольника $KB = \frac{\sqrt{3}}{2}a, AH = \frac{\sqrt{2}}{2}a, KN = \frac{\sqrt{2}}{4}a$ и, следовательно, $\sin \angle KBN = \frac{KN}{KB} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, отсюда $\angle KBN = arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Способ №4. *(Тригонометрия)* ΔAPD-правильный треугольник,поэтому $\angle ABP = 60^o$; $\angle KBP = 30^o$. ΔBPD-равнобедренный прямоугольник треугольник, тогда $\angle PBD = 45^o$. Пусть, $\angle(ABPD) = \gamma$.По теореме косинусов трехгранного угла $BAPD$:

$$\cos \angle ABD = \cos \angle ABP \cdot \cos \angle PBD + \sin \angle ABP \cdot \sin \angle PBD \cdot \cos \gamma$$

отсюда

$$\cos \gamma = \frac{\cos 45^0 - \cos 45^o \cos 60^o}{\sin 45^o \sin 60^o} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Longrightarrow \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

По теореме о трех синусов

$$\sin \angle(BK; (BPD) = \sin \angle(KB; BP) \cdot \sin \angle(ABPD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\Longrightarrow \angle(BK; KN) = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Критерии проверки:

1. **4 балла** – показан один способ решения (соблюдается логичность и полностью изложения)
2. **3 балла** – показан отличной от первого второй способ решения
3. **3 балла** – показан еще один способ отличной от первых двух