Mathematics. Olympiad trainers league

You are offered two sets of problems:

I. *«Mathematical Set»»* (***problems №1–№3*** *to solve).*

II. *«Methodical Set»* (***problems №5 — №7****, includes tasks simulating a Math Olympiad trainer professional activity).*

Time allowed: ***4 hours****.*

Each problem is worth ***10 points****.*

I. *Mathematical Set*

1. Sums. The set of 5 distinct positive integers is given: 1, 3, 5, 7, and X. There are exactly 24 different values of sums that can be obtained by adding two or more different numbers from this set. These values of sums cannot be equal to the numbers in the set themselves. Find the smallest possible value of X.

2. Equation. Solve the following equation:$16^{x^2+y} + 16^{x+y^2} = 1$.

3. Polynomial. Given a polynomial $P(x)$ with integer coefficients. It is known that the equation $P(x) = 20$ has five distinct integer roots. How many integer roots does the equation $P(x) = 24$ have?

4. Quadrilateral. A quadrilateral $ABCD$ is inscribed in a circle ω. The tangent to ω at A intersects the ray CB at K, and the tangent to ω at B intersects the ray DA at M. Prove that if $AM = AD$ and $BK = BC$, then $ABCD$ is a trapezoid.

II. *Methodical Set*

5. Solving the problem in several ways. Provide three different ways for solving the problem presented below:

Задача

Find the remainder of dividing the polynomial $P(x) = x^{2024} - 3x^{2023} + 5x^{20} - 7x^{23}$ by $Q(x) = x^2 + 1$.

6. Coordination. The problem below was given during a Mathematical Olympiad:

Problem

Let $x \in (0,1)$ be an irrational number and $x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$ its decimal representation. Let N denote the number of distinct sequences $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots a_{j+2023}$ of 2023 consecutive digits in the decimal representation of x. Prove that $N \geqslant 2024$.

Below is a **«partial solution»** provided by a student for the given problem. Utilizing the student's obtained result, please finalize the solution to the problem. Clearly state your suggestions in the coordination, along with justifications, for a potential evaluation of the student's «partial solution» (a fully correct solution, as usual, is worth 7 **points**).

Student's «partial solution»

Let us denote by n_k the number of distinct sequences $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots a_{j+k}$ of k consecutive digits in the decimal representation of x. We will prove by mathematical induction that $n_k \geqslant k+1$.

Suppose that for some $k \geqslant 1$, the inequality $n_k \geqslant k+1$ holds true. We aim to show that then $n_{k+1} \geqslant k+2$.

Let us assume that $n_{k+1} \leqslant k+1$. Notice that from each digit sequence of length k, by adding one digit, we can obtain a digit sequence of length $k+1$. Therefore, $n_{k+1} \geqslant n_k \geqslant k+1$.

Hence, we conclude that $n_k = n_{k+1} = k+1$.

7. Mistakes Identification. The problem below was given during a Mathematical Olympiad:

Problem

For all $x \in \mathbb{R}$, the equation $f(f(x)) = x^2 - x - 1$. holds. Determine all possible values of $f(f(f(0)))$.

Below is the **«solution»** provided by a **student**, which may contain mathematical mistakes. If the student's «solution» is incorrect, please identify all mistakes and provide a correct solution.

Student's «solution»

Let us substitute $x = 0$ *into the original equation. We get.* $f(f(0)) = -1$. *From this, we have*

$$f(f(f(0))) = f(-1).$$

Now, let us plug in $x = -1$ *into the original equation. Then* $f(f(-1)) = 1$ *and*

$$f(f(f(-1))) = f(1).$$

Plugging in $x = 1$ *into the original equation, we get* $f(f(1)) = -1$ *and*

$$f(f(f(-1))) = f(1).$$

Let $A = f(-1)$ *and* $B = f(-1)$. *From the original equation and the last equations, we obtain*

$$A = f(f(B)) = B^2 - B - 1, \quad B = f(f(A)) = A^2 - A - 1.$$

Therefore,

$$A = f(f(B)) = B^2 - B - 1 = (A^2 - A - 1)^2 - (A^2 - A - 1) - 1.$$

Thus,

$$\begin{gathered}(A^2 - A - 1)^2 - (A^2 - A - 1) - 1 - A = 0;\\ A^4 - 2A^3 - A^2 + 2A + 1 - A^2 + A + 1 - 1 - A = 0;\\ A^4 - 2A^3 - 2A^2 + 2A + 1 = 0;\\ (A + 1)(A^3 - 3A^2 + 3A - 1) = 0;\\ (A + 1)(A - 1)^3 = 0.\end{gathered}$$

Therefore, we get $f(f(f(0))) = f(-1) = A \pm 1$.

Answer: $f(f(f(0))) = \pm 1$.

Математика. Лига тренеров

Вам предлагаются два блока заданий:

I. *«Математический блок» (**задачи №1–№4** для решения).*

II. *«Методический блок» (**задачи №5–№7**, включает в себя задания, моделирующие повседневную работу тренера олимпийского резерва).*

*Продолжительность конкурса: **4 часа**.*

*Каждое задание оценивается в **10 баллов**.*

I. *Математический блок*

1. Числа. Дан набор из 5 различных натуральных чисел: 1, 3, 5, 7 и X. Известно, что можно получить ровно 24 разных значений сумм, складывая два или более разных чисел из этого набора. Найдите наименьшее возможное значение X, если значения сумм не могут равняться самим числам из набора.

2. Уравнение. Решить уравнение: $16^{x^2+y} + 16^{x+y^2} = 1$.

3. Многочлен. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что уравнение $P(x) = 20$ имеет пять различных целых корней. Сколько различных целых корней имеет уравнение $P(x) = 24$?

4. Четырёхугольник. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Касательная к ω в точке A пересекает луч CB в точке K,а касательная к ω в точке B пересекает луч DA в точке M. Докажите, что если $AM = AD$ и $BK = BC$, то $ABCD$ является трапецией.

II. *Методический блок*

5. Решение задачи несколькими способами. Приведите три различных способа решения представленной ниже задачи:

Задача

Найти остаток от деления многочлена $P(x) = x^{2024} - 3x^{2023} + 5x^{20} - 7x^{23}$ на $Q(x) = x^2 + 1$.

6. Координация. На математической олимпиаде была предложена задача:

Задача

Пусть дано иррациональное число $x \in (0,1)$, десятичная запись которого имеет вид $x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$. Пусть N означает количество различных последовательностей вида $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots a_{j+2023}$, состоящих из 2023 последовательных цифр после запятой в десятичной записи числа x. Докажите, что $N \geqslant 2024$.

Ниже приведено **«частичное решение»** ученика. Покажите как, используя полученный этим учеником результат, закончить решение задачи. Укажите возможные Ваши предложения с обоснованием по оценке стоимости продвижения ученика на координации (за полное решение задачи на олимпиаде давалось, как обычно, 7 **баллов**).

«Частничное решение» ученика

Обозначим через n_k количество различных последовательностей вида $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots a_{j+k}$ состоящих из k идущих подряд цифр после запятой десятичной записи числа x. Методом математической индукции докажем, что $n_k \geqslant k+1$.

Допустим, что при некотором $k \geqslant 1$ справедливо неравенство $n_k \geqslant k+1$. Докажем, что тогда $n_{k+1} \geqslant k+2$.

Допустим, что $n_{k+1} \leqslant k+1$. Заметим, что из любой последовательности идущих подряд цифр после запятой десятичной записи числа x длины k добавлением одной цифры мы можем получить последовательность идущих подряд цифр после запятой десятичной записи числа x длины $k+1$. Поэтому $n_{k+1} \geqslant n_k \geqslant k+1$.

Значит, $n_k = n_{k+1} = k+1$.

7. Поиск ошибок. На математической олимпиаде была предложена задача:

Задача

Для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $f(f(x)) = x^2 - x - 1$. Найдите все возможные значения $f(f(f(0)))$.

Ниже приведено **«решение» ученика**, которое может содержать математические ошибки. Если «решение» ученика неверно, то укажите все ошибки и приведите верное решение.

«Решение» ученика

Подставим в исходное равенство $x = 0$. Получим $f(f(0)) = -1$. Отсюда

$$f(f(f(0))) = f(-1).$$

Подставим в исходное равенство $x = -1$. Тогда $f(f(-1)) = 1$, и

$$f(f(f(-1))) = f(1).$$

Подставим в исходное равенство $x = 1$. Тогда $f(f(1)) = -1$, и

$$f(f(f(-1))) = f(1).$$

Обозначим $A = f(-1)$, $B = f(-1)$. Из исходного и последних равенств получим

$$A = f(f(B)) = B^2 - B - 1, \quad B = f(f(A)) = A^2 - A - 1.$$

Следовательно,

$$A = f(f(B)) = B^2 - B - 1 = (A^2 - A - 1)^2 - (A^2 - A - 1) - 1.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}(A^2 - A - 1)^2 - (A^2 - A - 1) - 1 - A = 0;\\ A^4 - 2A^3 - A^2 + 2A + 1 - A^2 + A + 1 - 1 - A = 0;\\ A^4 - 2A^3 - 2A^2 + 2A + 1 = 0;\\ (A+1)(A^3 - 3A^2 + 3A - 1) = 0;\\ (A+1)(A-1)^3 = 0.\end{gathered}$$

Отсюда получаем $f(f(f(0))) = f(-1) = A \pm 1$.

Ответ: $f(f(f(0))) = \pm 1$.

6TH INTERNATIONAL OLYMPIAD OF TEACHERS AND TRAINERS

Математика. Тренерлер лигасы

Сіздерге екі бөлімнен тұратын тапсырмалар ұсынылады:

I. *«Математикалық бөлім» (**№1–№4 есептерді** шығаруға).*

II. *«Әдістемелік бөлім» (**№4–№6 есептер**, олимпиада жаттықтырушысының күнделікті жұмысына бағытталған).*

*Байқау ұзақтығы: **4 сағат**.*

*Әр есеп **10 ұпайға** бағаланады.*

I. *Математикалық бөлім*

1. Сандар. 5 әр түрлі натуралдық сандардан тұратын 1, 3, 5, 7 , X жиыны берілген. Осы жиыннан екі немесе одан да көп сандарды қосу арқылы дәл 24 әр түрлі мәндерді (сандарды) алуға болады. Егер бұл мәндердің әрқайсысы жиындағы сандарға тең емес екені белгілі болса, онда X санының ең кіші мәнін табыңыз.

2. Теңдеу. Теңдеуді шешіңіз: $16^{x^2+y} + 16^{x+y^2} = 1$.

3. Көпмүшелік. Бүтін коэффициентті $P(x)$ көпмүшелігі берілген. $P(x) = 20$ теңдеуінің бес әртүрлі бүтін түбірі бар екені белгілі. $P(x) = 24$ теңдеуінің қанша әртүрлі бүтін түбірі бар?

4. Төртбұрыш. $ABCD$ төртбұрышы ω шеңберіне іштей сызылған. ω шеңберіне A нүктесінен жүргізілген жанама CB сәулесін K нүктесінде,ал ω шеңберіне B нүктесінен жүргізілген жанама DA сәулесін M нүктесінде қияды. Егер $AM = AD$ және $BK = BC$ болса, онда $ABCD$ трапеция болатынын дәлелдеңіз.

II. *Әдістемелік бөлім*

5. Әр түрлі тәсілмен тапсырманы орындау. Төменде берілген тапсырманың әр түрлі үш тәсілмен шешімін келтіріңіз:

Задача

$P(x) = x^{2024} - 3x^{2023} + 5x^{20} - 7x^{23}$ көпмүшелігін $Q(x) = x^2 + 1$ көпмүшелігіне бөлгендегі қалдығын табыңыз.

6. Координация. Математикалық олимпиадада мына тапсырма ұсынылды:

Есеп

Ондық жазылуы $x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$ болатын $x \in (0,1)$ иррационал саны берілген. x санының ондық жазылуында үтірден тұрған 2023 тізбектес цифрлар $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots a_{j+2023}$ түріндегі тізбектерінің саны N болсын. $N \geqslant 2024$ болатынын дәлелдеңіз.

Төменде оқушының «толық емес шешімі» берілген. Оқушының жұмысын жалғастырып, есептің толық шығару жолын көрсетіңіз. Координацияда оқушының жұмысын бағалау жөнінде Өзіңіздің негізделген ұсыныстарыңызды беріңіз (олимпиадада толық шығарылған есеп үшін, әдеттегідей, **7 ұпай** берілген).

Оқушының «жартылай шешімі»

n_k арқылы x санынң ондық жазылуындағы үтірден кейінгі $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots a_{j+k}$ түріндегі k тізбектес цифрлардан тұратын тізбектер санын белгілейік . Математикалық индукция әдісімен $n_k \geqslant k+1$ боатынын дәлелдейік.

Айталық қайсібір $k \geqslant 1$ үшін $n_k \geqslant k+1$ теңсіздігі орындалады деп ұйғарайық. Онда $n_{k+1} \geqslant k+2$ болатынын дәлелдейік.

Айталық $n_{k+1} \leqslant k+1$ болсын. x санының ондық жазылуындағы осындай ұзындығы k болатын тізбекке бір цифрді қосу арқылы біз ұзындығы $k+1$ болатын тізбек ала аламыз. Сондықтан $n_{k+1} \geqslant n_k \geqslant k+1$.

Демек, $n_k = n_{k+1} = k+1$.

7. Қате іздеу. Математикалық олимпиадада мына тапсырма ұсынылды:

Есеп

Әрбір $x \in \mathbb{R}$ үшін $f(f(x)) = x^2 - x - 1$ теңдігі орындалады. $f(f(f(0)))$-дің барлық мүмкін мәндерін табыңыз.

Төменде математикалық қателері болуы мүмкін **«оқушының шешуі»** көрсетілген. Егер «оқушының шешуі» дұрыс болмаса, онда себебін түсіндіріп барлық қателерді көрсетіңіз және дұрыс шешуін келтіріңіз.

Оқушының «шешуі»

Теңдікке $x = 0$ *қойсақ,* $f(f(0)) = -1$ *шығады. Бұдан*

$$f(f(f(0))) = f(-1).$$

Теңдікке $x = -1$ *қойсақ* $f(f(-1)) = 1$ *шығады және*

$$f(f(f(-1))) = f(1)$$

болады.
Теңдікке $x = 1$ *қойсақ,* $f(f(1)) = -1$ *шығады және*

$$f(f(f(-1))) = f(1).$$

$A = f(-1)$, $B = f(-1)$ *болсын. Соңғы теңдіктерді ескерсек,*

$$A = f(f(B)) = B^2 - B - 1, \quad B = f(f(A)) = A^2 - A - 1.$$

Бұдан,

$$A = f(f(B)) = B^2 - B - 1 = (A^2 - A - 1)^2 - (A^2 - A - 1) - 1.$$

Бұдан,

$$\begin{gathered} (A^2 - A - 1)^2 - (A^2 - A - 1) - 1 - A = 0; \\ A^4 - 2A^3 - A^2 + 2A + 1 - A^2 + A + 1 - 1 - A = 0; \\ A^4 - 2A^3 - 2A^2 + 2A + 1 = 0; \\ (A + 1)(A^3 - 3A^2 + 3A - 1) = 0; \\ (A + 1)(A - 1)^3 = 0. \end{gathered}$$

Демек, $f(f(f(0))) = f(-1) = A \pm 1$.

Жауабы: $f(f(f(0))) = \pm 1$.