INTERNATIONAL OLYMPIAD
OF TEACHERS AND TRAINERS

Mathematics. Teachers league.

You are offered two sets of problems:
I. «Mathematical Set» *(problems **№1–№4** to solve).*
II. «Methodical Set» *(задачи **№5–№7**, includes tasks simulating a Math teacher professional activity).*
Time allowed: ***4 hours.***
Each problem is worth ***10 points.***

I. *Mathematical Set*

1.Numbers. We multiplied five consecutive three-digit natural numbers. Choose the correct statement(s).
Statement.A. The resulting product may end with three sixes.
Statement.B. The resulting product may end with three zeros.
Statement.C. The resulting product may end with four zeros.
Statement.D. The resulting product may end with five zeros.
Do not forget to justify your answer to each statement.

2.Equation. 2. Solve the equation:

$$f'(x) + 6f(x) = 8x,$$

where $f(x) = 2x^2$, $f'(x)$-is derivative of $f(x)$, $\{a\}$ - is a fractional part of number a. (For example, $\{2{,}024\} = 0{,}024$.)

3.Quadrilateral. Given an inscribed convex quadrilateral $ABCD$. The center of another circle ω lies on the side AD and touches the other sides of the quadrilateral $ABCD$. Prove that $AB + CD = AD$.

4.Polynomial. 4. Let $P(x)$ be a polynomial of degree 2023 with integer coefficients, where the leading coefficient is 1, and its graph passes through the points

$$(1; 2023),\ (2; 2022),\ (3; 2021),\ ....,\ (2023; 1).$$

Find $P(2024)$.

II. *Methodical Set*

5.Planimetry formulas.

Problem

(a) Prove the theorem: *If we draw a chevian AE in triangle ABC, then*

$$AE^2 = \frac{AB^2 \cdot CE + AC^2 \cdot BE}{BC} - BE \cdot EC.$$

(b) Use the theorem to derive the formula for the median.

(c) Use the theorem to prove the formula of Heron's formula.

(d) Use the theorem to prove the formula for the bisector. Specifically, if in triangle ABC you draw the bisector AE, then

$$AE = \sqrt{BA \cdot AC - BE \cdot EC}.$$

Searching for mistakes.

The following two problems are offered with already written solutions, possibly partially or completely wrong.

6.Parametric equation.

Problem

Find all values of the parameter p such that the equation

$$(p-1)x^2 + (4p-1)x + 2p^2 + 1 = 0$$

has only integer roots.

Below you can find **«solution»** to the problem given by a student. The «solution» may contain mathematical mistakes. If the student's «solution» is incorrect, then indicate all the mistakes and give the correct solution.

The student's «solution»

By Vieta's Formula we get

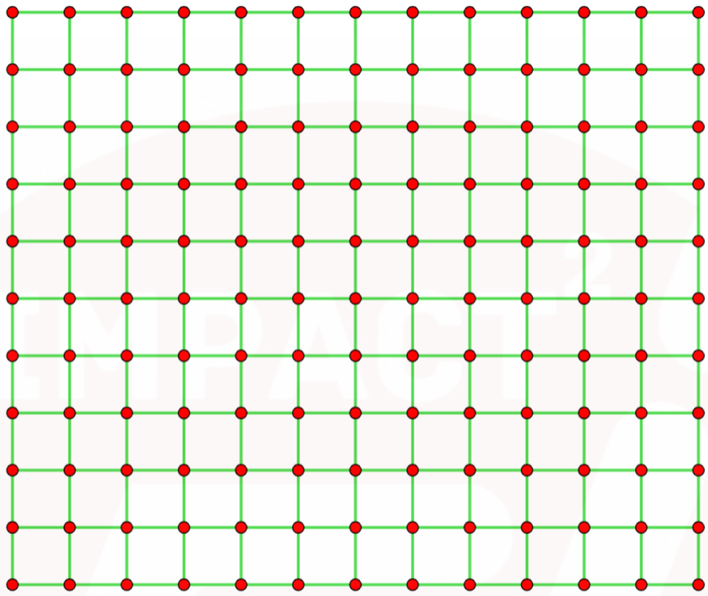
$$x_1 + x_2 = \frac{4p-1}{p-1} = 4 + \frac{3}{p-1} \in \mathbb{Z}, \qquad x_1 x_2 = \frac{2p^2+1}{p-1} = 2p + 2 + \frac{3}{p-1} \in \mathbb{Z}$$

$\frac{3}{p-1}$ *must be an integer, since* 4, $2p+2$ *are integers. Hence,* $p-1 = \pm 1$ *or* $p-1 = \pm 3$, *whence* $p_1 = 0, p_2 = 2, p_3 = 4, p_4 = -2$.
«Answer». $p \in \{-2; 0; 2; 4\}$.

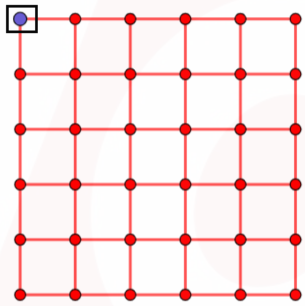
7.Combinatorics.

Problem

Given a rectangle of dimensions $10 \times 12.$, find the number of squares with vertices at nodes (corners) with side length 5.



Below you can find **«solution»** to the problem given by a student. The «solution» may contain mathematical mistakes. If the student's «solution» is incorrect, then indicate all the mistakes and give the correct solution.



The student's «solution»

The left upper vertex completely determines each square with a side length of 5. *Counting from the left, none of the points in the eighth column can be the left upper vertex. Similarly, counting from the top, none of the points in the sixth row can be the left upper vertex. Therefore, the set of points that can serve as the left upper vertex of a square with a side length of* 5 *is a rectangle of size* 5. *Each node in this rectangle corresponds to a unique square. Consequently, the total number of such squares is* 35.
«Answer». 35.

Математика. Мұғалімдер лигасы

Сіздерге екі бөлімнен тұратын тапсырмалар ұсынылады:

I. «Математикалық бөлім» *(* ***№1–№4*** *тапсырмалар шығаруға).*

II. «Әдістемелік бөлім» *(* ***№5–№7*** *тапсырмалар мұғалімдердің күнделікті жұмысына бағытталған).*

Байқау ұзақтығы: ***4 сағат.***

Әр тапсырма ***10 ұпаймен*** *бағаланады.*

I. *Математикалық бөлім*

1.Сандар. Тізбектес бес үштаңбалы натурал сандарды көбейтті.

Дұрыс тұжырымды(дарды) таңдаңыз.

A.тұжырымы. Көбейтінді үш алтымен аяқталуы мүмкін.
B.тұжырымы. Көбейтінді үш нөлмен аяқталуы мүмкін.
C.тұжырымы. Көбейтінді төрт нөлмен аяқталуы мүмкін.
D.тұжырымы. Көбейтінді бес нөлмен аяқталуы мүмкін.

Әр тұжырымға келтірілген жауабыңызды негіздеуді ұмытпаңыз.

2.Теңдеу. Теңдеуді шешіңіз:

$$f'(x) + 6f(x) = 8x,$$

мұнда $f(x) = \left\{2x^2\right\}$, $f'(x)$ - $f(x)$ функциясының туындысы және $\{a\}$ - a санының бөлшек бөлігі. (Мысалы, $\{2{,}024\} = 0{,}024$.)

3.Төртбұрыш. Шеңберге іштей сызылған $ABCD$ дөңес төртбұрышы берілген. Тағы бір ω шеңберінің центрі AD қабырғасында жатыр және $ABCD$ төртбұрышының басқа қабырғаларын жанайды. Дәлелдеңіз: $AB + CD = AD$.

4.Көпмүшелік. Графигі

$$(1; 2023),\ (2; 2022),\ (3; 2021),\ ....,\ (2023; 1)$$

нүктелерінен өтетін 2023 дәрежелі, бүтін коэффициентті және бас коэффициенті 1-ге тең $P(x)$ көпмүшелігі берілген. $P(2024)$ табыңыз.

II. *Әдістемелік бөлім*

5.Планиметрия формулалары.

Тапсырма

(a) Теореманы дәлелдеңіз: *ABC үшбұрышындағы AE чевианасы үшін*

$$AE^2 = \frac{AB^2 \cdot CE + AC^2 \cdot BE}{BC} - BE \cdot EC$$

теңдігі орындалады. Мұнда, чевиана - үшбұрыштың төбесі мен осы төбеге қарсы қабырғасында жатқан нүктені қосатын кесінді.

(b) Осы теореманы қолданып, медиана формуласын қорытып шығарыңыз.

(c) Осы теореманы қолданып, Герон формуласын қорытып шығарыңыз.

(d) Осы теореманы қолданып, биссектрисаның формуласын қорытып шығарыңыз.Нақтырақ: ABC үшбұрышының AE биссектрисасы үшін

$$AE = \sqrt{BA \cdot AC - BE \cdot EC}.$$

Қателер іздеу

Келесі екі тапсырма шешімдерімен келтірілген. Шешімдерде қателіктер болуы мүмкін.

6.Параметр.

Есеп

$$(p-1)x^2 + (4p-1)x + 2p^2 + 1 = 0$$

теңдеуінің бүтін шешімі болатындай барлық p параметрінің мәндерін табыңыз.

Төменде математикалық қателері болуы мүмкін **«оқушының шешу»** көрсетілген. Егер оқушының «шешуі» дұрыс болмаса, онда себебін түсіндіріп барлық қателерді көрсетіңіз және дұрыс шешуін келтіріңіз

Оқушының «шешуі»

Виет теоремасы бойынша:

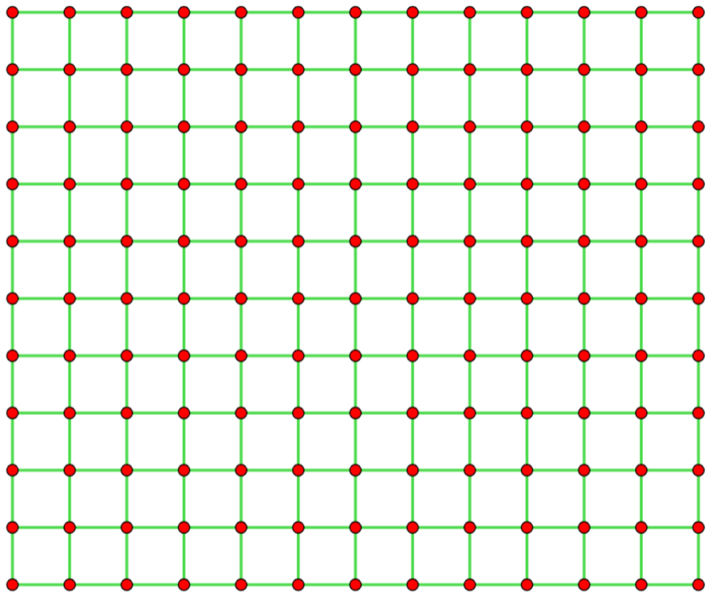
$$x_1 + x_2 = \frac{4p-1}{p-1} = 4 + \frac{3}{p-1} \in \mathbb{Z}, \qquad x_1 x_2 = \frac{2p^2+1}{p-1} = 2p + 2 + \frac{3}{p-1} \in \mathbb{Z}$$

$4,\ 2p+2$ *бүтін сандар болғандықтан* $\frac{3}{p-1}$ *саны да бүтін болу керек.*
Бұдан, $p-1=\pm 1$ *или* $p-1=\pm 3$*, демек* $p_1 = 0,\ p_2 = 2, p_3 = -2, p_4 = 4$.
«Жауабы». $p \in \{-2; 0; 2; 4\}$.

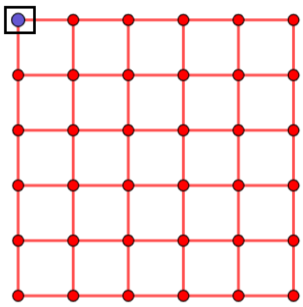
7.Комбинаторика.

Есеп

10×12 өлшемді торкөзді тіктөртбұрыш берілген. (суретте көрсетілгендей) Төбелері торкөз түйіндері болатын, қабырғасы 5 ке тең барлық шаршылардың санын табыңыз.



Төменде математикалық қателері болуы мүмкін **«оқушының шешу»** көрсетілген. Егер оқушының «шешуі» дұрыс болмаса, онда себебін түсіндіріп барлық қателерді көрсетіңіз және дұрыс шешуін келтіріңіз



Оқушының «шешуі»

Қабырғасы 5 болатын барлық шаршыны сол жақ жоғарғы түйін анықтайды. Сол жақтан бастап санағандағы сегізінші бағанда тұрған түйіндердің ешқайсысы сол жақ жоғарғы түйін бола алмайды. Дәл сол сияқты жоғарыдан санағанда алтыншы жолда тұрған түйіндердің де сол жақ жоғарғы түйін бола алмайтыны түсінікті. Демек, сол жақ жоғарғы түйін бола алатын нүктелер жиыны ол 5×7 *өлшемді тіктөртбұрыш. Осы тіктөртбұрышқа тиісті әрбір түйінге бір шаршыны сәйкес қоятын болсақ, онда барлығы* 35 *шаршы болады.*
«Жауабы». 35.

Математика. Лига учителей

Вам предлагаются два блока заданий:
I. «Математический блок» *(задачи* ***№1–№4*** *для решения).*
II. «Методический блок» *(задачи* ***№5–№7****, включает в себя задания, моделирующие повседневную работу учителя).*
Продолжительность конкурса: ***4 часа.***
Каждое задание оценивается в ***10 баллов.***

I. *Математический блок*

1.Числа.Перемножили пять последовательных трехзначных натуральных чисел. Выберите верное(ые) утверждение(я).
Утверждение.A. Полученное произведение может оканчиваться тремя шестерками.
Утверждение.B. Полученное произведение может оканчиваться тремя нулями.
Утверждение.C. Полученное произведение может оканчиваться четырьмя нулями.
Утверждение.D. Полученное произведение может оканчиваться пятью нулями.
Не забудьте обосновать свой ответ.

2.Уравнение. Решите уравнение:

$$f'(x) + 6f(x) = 8x,$$

где $f(x) = \left\{2x^2\right\}$, $f'(x)$ - производная функции $f(x)$ и $\{a\}$ -дробная часть числа a. (Например, $\{2{,}024\} = 0{,}024$.)

3.Четырехугольник. Дан вписанный выпуклый четырехугольник $ABCD$. Центр другой окружности ω лежит на стороне AD и касается остальных сторон четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $AB + CD = AD$.

4.Многочлен. Пусть $P(x)$ - многочлен 2023 степени с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1 и график которого проходит через точки

$$(1; 2023),\ (2; 2022),\ (3; 2021),\ ....,\ (2023; 1).$$

Найдите $P(2024)$.

II. *Методический блок*

5.Формулы планиметрии.

Задача

(a) Докажите теорему: *Если провести чевиану AE в треугольнике ABC, тогда*

$$AE^2 = \frac{AB^2 \cdot CE + AC^2 \cdot BE}{BC} - BE \cdot EC$$

Чевиана — отрезок в треугольнике, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной стороне.

(b) Используйте теорему для выведения формулы медианы.

(c) Используйте теорему для доказательства формулы Герона.

(d) Используйте теорему для доказательства формулы биссектрисы. А именно: если в треугольнике ABC провести биссектрису AE, то

$$AE = \sqrt{BA \cdot AC - BE \cdot EC}.$$

Поиск ошибок

Следующие две задачи предлагаются с уже написанными решениями, возможно, частично или полностью ошибочными.

6.Параметр.

Задача

Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $(p-1)x^2 + (4p-1)x + 2p^2 + 1 = 0$ имеет только целые корни.

Ниже приведено **«решение» ученика**, которое может содержать математические ошибки. Если «решение» ученика неверно, то укажите все ошибки и приведите верное решение.

«Решение» ученика

По теореме Виета, получим:

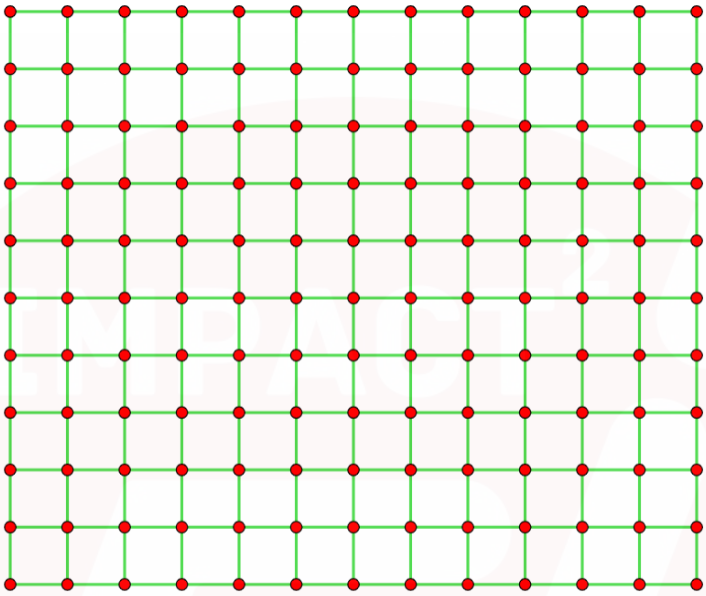
$$x_1 + x_2 = \frac{4p-1}{p-1} = 4 + \frac{3}{p-1} \in \mathbb{Z}, \qquad x_1x_2 = \frac{2p^2+1}{p-1} = 2p + 2 + \frac{3}{p-1} \in \mathbb{Z}$$

$\frac{3}{p-1}$ *должно быть целым числом, так как* $4,\ 2p+2$ *являются целыми числами. Следовательно,* $p-1 = \pm 1$ *или* $p-1 = \pm 3$, *откуда* $p_1 = 0,\ p_2 = 2, p_3 = -2, p_4 = 4$.
«Ответ». $p \in \{-2; 0; 2; 4\}$.

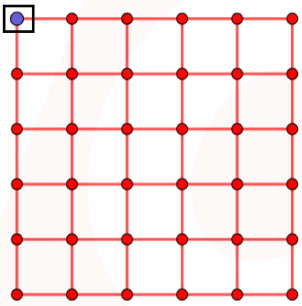
7.Комбинаторика.

Задача

На рисунке ниже дан сетчатый прямоугольник размером 10×12. Найдите количесто квадратов, со стороной 5, с вершинами в узлах сетки.



Ниже приведено **«решение» ученика**, которое может содержать математические ошибки. Если «решение» ученика неверно, то укажите все ошибки и приведите верное решение.



«Решение» ученика

Левая верхняя вершина полностью определяет каждый квадрат со стороной 5. *Считая слева, ни одна из точек восьмого столбца не может быть левой верхней вершиной. Аналогично, если считать сверху, то ни одна точка шестой строки не может быть левой верхней вершиной. Значит, множеством точек, который могут служит как левой верхней вершиной квадрата со стороной 5 является прямоугольник* 5×7. *Каждому узлу из этого прямоугольника соответствует единственный квадрат. Следовательно, таких квадратов будет всего* 35.

«Ответ». 35.