VII International open creative contest for teachers and trainers of the Olympic reserve of Mathematics, Physics and Informatics

ASTANA, 13-16 January 2025

Математика. Тренерлер лигасы

Сіздерге екі бөлімнен тұратын тапсырмалар ұсынылады:

I. *«Математикалық бөлім» (**№1–№4 есептерді** шығаруға).*

II. *«Әдістемелік бөлім» (**№4–№6 есептер**, олимпиада жаттықтырушысының күнделікті жұмысына бағытталған).*

*Байқау ұзақтығы: **4 сағат**.* *Әр есеп **10 ұпайға** бағаланады.*

I. *Математикалық бөлім*

1. Қоңыздың саяхаты. Қоңыз өзінің жолын теңқабырғалы үшбұрыштың бір төбесінен бастады. Ендігі әр қадамда қоңыз теңқабырғалы үшбұрыштың қалған екі төбесісінің біріне үшбұрыштың қабырғасымен сырғанайды. Қоңыздың дәл 20 немесе 25 жүрістен кейін бастапқы төбесіне оралуының ықтималдығын табыңыз .

Ескерту. Егер қоңыз 20 жүрістен кейін бастапқы төбеге оралса, ол өзінің орын ауыстыруын тоқтатады.

2. Теңдеу. $2^x+3^y=z^2$. теңдеуін қанағаттандыратын барлық (x,y,z) теріс емес бүтін сандар үштігін табыңыз.

3. Функционалдық теңдеу. Барлық $x,y\in\mathbb{R}$ сандары үшін

$$f\left(x^2\right)f\left(y^2\right)+|x|f\left(-xy^2\right)=3|y|f\left(x^2y\right).$$

теңдеуін қанағаттандыратын барлық $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ функцияларын табыңыз.

4. Үшбұрыш. $\angle BOC=90^\circ$ және $\angle BAO=\angle BCO$ болатындай O нүктесі ішінде орналасқан ABC үшбұрышын қарастырайық. Айталық M және N нүктелері сәйкесінше AC және BC кесінділерінің ортасы болсын. $\angle OMN=90^\circ$ болатынын дәлелдеңіз.

II. *Әдістемелік бөлім*

5. Есепті әртүрлі әдіспен шешу. Төменде көрсетілген есептің **төрт әртүрлі шешімін** келтіріңіз:

Есеп

Қосындыны табыңыз: $S_n=1^2+2^2+\ldots+n^2$.

Шектеу: Алғашқы n натурал санның квадраттары қосындысының формуласын қолдануға **рұқсат етілмейді**. Барлық шешімдерде әдістер әр түрлі болуы керек және нақты логикалық тізбек көрсетілуі қажет.

6. **Координация.** Математикадан олимпиадада келесі тапсырма ұсынылды:

Есеп

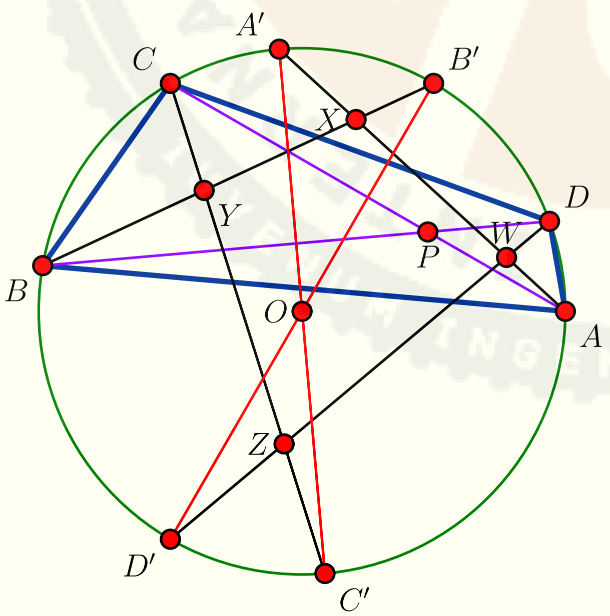
$ABCD$ төртбұрышы центрі нүктесі болатын шеңберге іштей сызылған. A және төбесіндегі ішкі бұрыш биссектрисалары X нүктесінде, B және төбелеріндегі ішкі бұрыш биссектрисалары Y нүктесінде, C және D төбелеріндегі ішкі бұрыш биссектрисалары Z нүктесінде, D және A төбелеріндегі бұрыш биссектрисалары W нүктесінде қиылысады. Айталық және BD түзулері P нүктесінде қиылысады. X, Y, Z, W, O және P нүктелері әртүрлі болсын.

Егер P, X, Y, Z және W бір шеңбердің бойында жатса, сонда және сонда ғана O, X, Y, Z, W нүктелері бір шеңбердің бойында жататынын дәлелдеңіз.

Төменде оқушының **«толық емес шешімі»** берілген. Оқушының жұмысын жалғастырып, есептің толық шығару жолын көрсетіңіз. Координацияда оқушының жұмысын бағалау жөнінде өзіңіздің негізделген ұсыныстарыңызды беріңіз (олимпиадада толық шығарылған есеп үшін, әдеттегідей, **7 ұпай** берілген).

Оқушының «толық емес шешімі»

X, Y, Z, W, P және O нүктелері канондық қимасында жататынын дәлелдейік. Бұл бес нүктенің бір шеңбердің бойында жататынының шарты болады. Сондықтан егер X, Y, Z, W және P нүктелері шеңбердің бойында жатады және O нүктесі де осы шеңбердің бойында жатады. Дәл солай, егер X, Y, Z, W және O нүктелері бір шеңбердің бойында жатса, онда P нүктесі де сол шеңберде жатады.



Айталық — вторые точки пересечения биссектрис углов $\angle DAC$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ және $\angle CDA$ бұрыштарының биссектрисалары $ABCD$ төртбұрышына сырттай сызылған шеңбермен екінші рет A', B', C' және D' нүктелерінде қиылыссын. A' және C' нүктелері BD доғаларының ортасы , ал B' және D' нүктелері – AC доғаларының ортасы және $A'C'$ және $B'D'$ түзулері O нүктесінде қиылысады.

7. Қателер іздеу. Математикадан олимапиадада келесі есеп ұсынылды:

Есеп

650 нүктені қамтитын, радиусы 16 болатын дөңгелек берілген. Дөңгелектің ішіндегі дәл n нүктені қамтитын ішкі радиусы 2-ге, сыртқы радиусы 3-ке тең сақина табылатындай n-нің ең үлкен мәнін табыңыз.

Төменде математикалық қателері болуы мүмкін **«оқушының шешуі»** көрсетілген. Егер «оқушының шешуі» дұрыс болмаса, онда себебін түсіндіріп барлық қателерді көрсетіңіз және дұрыс шешуін келтіріңіз.

Оқушының «шешуі»

Айталық $\mathcal{C}$ — радиусы 16 болатын, центрі O нүктесі болатын дөңгелек болсаын, ал $P_1, P_2, \ldots, P_{650}$ —шеңбердегі нүктелер болсын. $n \geqslant 13$ болатынын дәлелдейік.

Біз кездейсоқ O' нүктесін $\mathcal{A}$ сақинасы $\mathcal{C}$ шеңберімен бір нүктеде қиылысатындай таңдаймыз. Айталық X — случайная величина, представляющая количество отмеченных точек P_i, которые $\mathcal{A}$ сақинасының ішінде орналасқан P_i нүктелерінің санын беретін кездейсоқ шама болсын. Біз X-ті индикаторлық кездейсоқ шамалардың қосындысы түрінде кесізде түрде жаза аламыз:

$$X = \sum_{i=1}^{650} X_i, \text{ мұндағы } X_i = \begin{cases} 1, & \text{егер } P_i \in \mathcal{A} \\ 0, & \text{қарама қарсы жағдайда }. \end{cases}$$

X_i кездейсоқ шамасының математикалық күтімі:

$$\mathbb{E}[X_i] = 1 \cdot \mathbb{P}[X_i = 1] + 0 \cdot \mathbb{P}[X_i = 0] = \mathbb{P}[X_i = 1]$$
$$= \frac{Area(\mathcal{A})}{Area(\mathcal{C})} = \frac{3^2 \cdot \pi - 2^2 \cdot \pi}{16^2 \pi} = \frac{5}{256}.$$

Математикалық күтімнің сызықтық қасиетін қолдансақ:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{650} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{650} \frac{5}{256} = 650 \cdot \frac{5}{256} = \frac{3250}{256} > 11.$$

X бүтін сан болатынын ескерсек, $X \geqslant 12$ болады, яғни сақина 12 нүктені қамтитын сақина табылады. Демек, $n \leqslant 12$.

Жауабы: 12.

Математика. Лига тренеров

Вам предлагаются два блока заданий:

I. *«Математический блок» (**задачи №1–№4** для решения).*

II. *«Методический блок» (**задачи №5–№7**, включает в себя задания, моделирующие повседневную работу тренера олимпийского резерва).*

*Время конкурса: **4 часа**.* *Каждое задание оценивается в **10 баллов**.*

I. *Математический блок*

1. Путешествие жука. Жук начинает свой путь в одной из вершин равностороннего треугольника. На каждом шаге он случайно выбирает одну из двух других вершин и переползает к ней по стороне треугольника. Найдите вероятность того, что жук может вернуться в исходную вершину ровно через 20 или 25 ходов.

Примечание. Если жук ровно через 20 ходов достигает начальной вершины, он останавливается и больше не совершает перемещений.

2. Уравнение. Найдите все тройки (x, y, z) неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих уравнению $2^x + 3^y = z^2$.

3. Функциональное уравнение. Найти все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые при всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяют равенству $f\left(x^2\right) f\left(y^2\right) + |x| f\left(-xy^2\right) = 3|y| f\left(x^2 y\right)$.

4. Треугольник. Рассмотрим треугольник ABC с точкой O, расположенной внутри него, такой что $\angle BOC = 90^\circ$ и $\angle BAO = \angle BCO$. Пусть M и N — середины отрезков AC и BC соответственно. Докажите, что $\angle OMN = 90^\circ$.

II. *Методический блок*

5. Решение задачи несколькими способами. Приведите **четыре различных способа** решения представленной ниже задачи:

Задача

Вычислите сумму: $S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

Ограничения: Непосредственное использование стандартной формулы для суммы квадратов первых n натуральных чисел **не допускается**. Все решения должны демонстрировать чёткую логическую цепочку и использовать разные методы для каждого способа.

6. Координация. На математической олимпиаде была предложена задача:

Задача

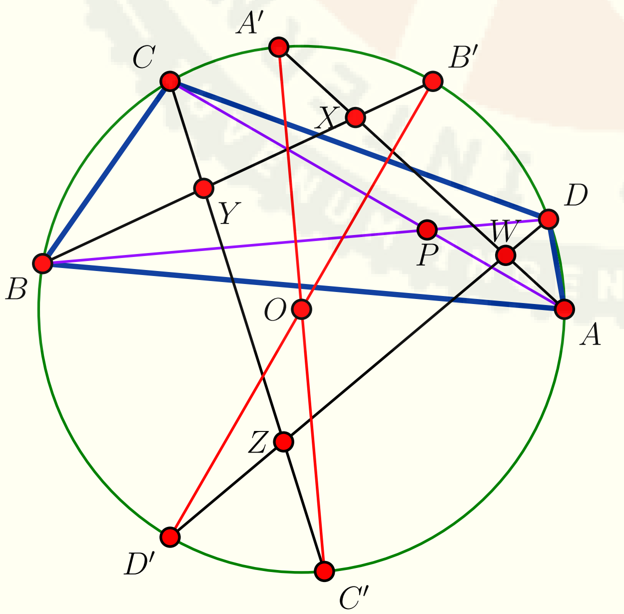
Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром окружности O. Пусть биссектрисы внутренних углов при вершинах A и B пересекаются в точке X, биссектрисы внутренних углов при вершинах B и C пересекаются в точке Y, биссектрисы внутренних углов при вершинах C и D пересекаются в точке Z, а биссектрисы внутренних углов при вершинах D и A пересекаются в точке W. Далее, пусть AC и BD пересекаются в точке P. Предположим, что точки X, Y, Z, W, O и P различны.

Докажите, что точки O, X, Y, Z и W лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда точки P, X, Y, Z и W лежат на одной окружности.

Ниже приведено **«частичное решение»** ученика. Покажите как, используя полученный этим учеником результат, закончить решение задачи. Укажите возможные Ваши предложения с обоснованием по оценке стоимости продвижения ученика на координации (за полное решение задачи на олимпиаде давалось, как обычно, 7 **баллов**).

«Частничное решение» ученика

Мы докажем, что точки X, Y, Z, W, P и O лежат на коническом сечении. Это более общее утверждение, поскольку пять точек уникально определяют коническое сечение. Таким образом, если точки X, Y, Z, W и P лежат на окружности, то эта окружность является коническим сечением, и точка O также лежит на этой окружности. Точно так же, если точки X, Y, Z, W и O лежат на окружности, то она также будет содержать точку P.



Пусть A', B', C' и D' — вторые точки пересечения биссектрис углов $\angle DAC$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ и $\angle CDA$ с описанной окружностью четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Заметим, что A' и C' являются серединами двух дуг, образованных точками BD, а B' и D' — серединами дуг, соответствующих AC, так что прямые $A'C'$ и $B'D'$ пересекаются в точке O.

7. Поиск ошибок. На математической олимпиаде была предложена задача:

Задача

Дан круг радиусом 16, содержащий 650 отмеченных точек. Найдите максимальное значение n, при котором существует кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, которое может покрыть как минимум n из отмеченных точек внутри окружности.

Ниже приведено **«решение» ученика**, которое может содержать математические ошибки. Если «решение» ученика неверно, то укажите все ошибки и приведите верное решение.

«Решение» ученика

Пусть $\mathcal{C}$ — данная окружность радиусом 16 с центром O, а $P_1, P_2, \ldots, P_{650}$ — отмеченные точки на окружности. Докажем, что $n \geqslant 13$.

Мы случайным образом выбираем центр O' для кольца $\mathcal{A}$ так, чтобы $\mathcal{A}$ имело хотя бы одну общую точку с окружностью $\mathcal{C}$. Пусть X — случайная величина, представляющая количество отмеченных точек P_i, которые лежат внутри кольца $\mathcal{A}$. Мы можем выразить X как сумму индикаторных случайных величин следующим образом:

$$X = \sum_{i=1}^{650} X_i, \quad \text{где } X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } P_i \in \mathcal{A} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины X_i равно:

$$\mathbb{E}[X_i] = 1 \cdot \mathbb{P}[X_i = 1] + 0 \cdot \mathbb{P}[X_i = 0] = \mathbb{P}[X_i = 1]$$
$$= \frac{Area(\mathcal{A})}{Area(\mathcal{C})} = \frac{3^2 \cdot \pi - 2^2 \cdot \pi}{16^2 \pi} = \frac{5}{256}.$$

Используя линейность математического ожидания, получаем:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{650} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{650} \frac{5}{256} = 650 \cdot \frac{5}{256} = \frac{3250}{256} > 11.$$

Поскольку X должно быть целым числом, существует такое положение центра кольца $\mathcal{A}$, что $X \geqslant 12$, то есть найдётся кольцо, которое покрывает как минимум 12 отмеченных точек. Следовательно, $n \leqslant 12$.

Ответ: 12.

VII International open creative contest for teachers and trainers of the Olympic reserve of Mathematics, Physics and Informatics

ASTANA, 13-16 January 2025

Mathematics. Olympiad trainers league

You are offered two sets of problems:

I. *«Mathematical Set»» (**problems №1–№3** to solve).*

II. *«Methodical Set» (**problems №5 — №7**, includes tasks simulating a Math Olympiad trainer professional activity).*

*Time allowed: 4 **hours**.* *Each problem is worth **10 points**.*

I. *Mathematical Set*

1. Bug's Journey A bug begins its journey at one vertex of an equilateral triangle. At each step, it randomly selects one of the other two vertices and crawls along the side to reach that vertex. Find the probability that the bug will return to its starting vertex after exactly 20 moves or 25 moves.

Note. If the bug returns to the starting vertex exactly after 20 moves, it stops and does not continue its journey.

2. Equation. Determine all the triples (x, y, z) of non-negative integers which satisfy the equation

$$2^x + 3^y = z^2.$$

3. Functional Equation. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which for all $x, y \in \mathbb{R}$ satisfy

$$f\left(x^2\right) f\left(y^2\right) + |x| f\left(-xy^2\right) = 3|y| f\left(x^2 y\right).$$

4. Triangle. Consider triangle ABC with a point O inside it such that $\angle BOC = 90^\circ$ and $\angle BAO = \angle BCO$. Let M and N be the midpoints of the segments AC and BC, respectively. Prove that $\angle OMN = 90^\circ$.

II. *Methodical Set*

5. Solving the problem in different ways. Provide **four distinct ways** to solving the following problem:

Problem

Find the value of the sum: $S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

Restrictions: Direct use of the standard formula for the sum of the squares of the first n natural numbers is **not allowed**. All solutions should demonstrate clear reasoning and involve unique methods.

6. **Coordination.** The problem below was given during a Mathematical Olympiad:

Problem

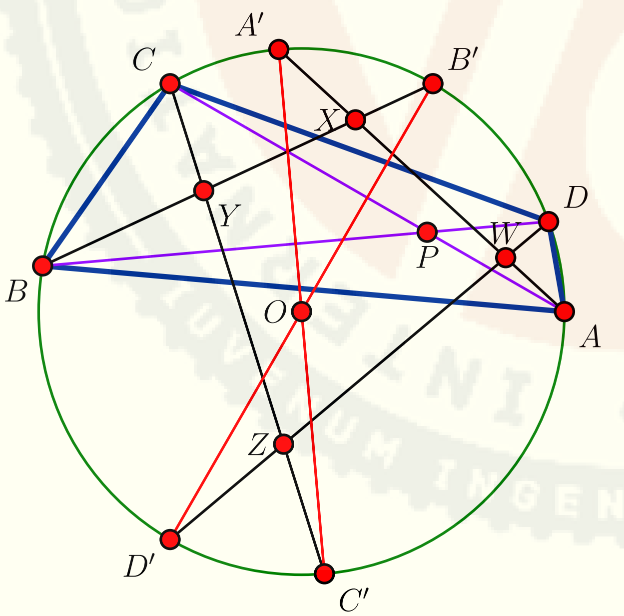
Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral with circumcentre O. Let the internal angle bisectors at A and B meet at X, the internal angle bisectors at B and C meet at Y, the internal angle bisectors at C and D meet at Z, and the internal angle bisectors at D and A meet at W. Further, let AC and BD meet at P. Suppose that the points X, Y, Z, W, O and P are distinct.

Prove that O, X, Y, Z and W lie on the same circle if and only if P, X, Y, Z and$W$ lie on the same circle.

Below is a **«partial solution»** provided by a student for the given problem. Utilizing the student's obtained result, please finalize the solution to the problem. Clearly state your suggestions in the coordination, along with justifications, for a potential evaluation of the student's «partial solution» (a fully correct solution, as usual, is worth 7 **points**).

Student's «partial solution»

We will prove that the points X, Y, Z, W, P and O lie on a conic section. This is a more general statement because five points uniquely determine a conic sections so if X, Y, Z, W and P lie on a circle then this circle is the conic section so O also lies on this circle. In the same way if X, Y , Z, W and O are on a circle then it also contains P.



Let A', B', C' and D' be the second intersection of the angle bisectors of $\angle DAC$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ and $\angle CDA$ with the circumcircle of $ABCD$, respectively. Notice that A' and C' are the midpoints of the two arcs of BD and B' and D' are the midpoints of arcs corresponding to AC so the lines $A'C'$ and $B'D'$ intersect in O.

7. **Mistakes Identification.** The problem below was given during a Mathematical Olympiad:

Problem

Given a circle with radius 16 that contains 650 marked points, determine the maximum value of n such that there exists a washer (annulus or ring) with an inner radius of 2 and an outer radius of 3 that can cover at least n of the marked points within the circle.

Below is the **«solution»** provided by a **student**, which may contain mathematical mistakes. If the student's «solution» is incorrect, please identify all mistakes and provide a correct solution.

Student's «solution»

Let $\mathcal{C}$ be the given circle of radius 16, with center O, and let $P_1, P_1, \ldots, P_{650}$ be the marked points on the circle. Let us prove that $n \geqslant 13$.

We will randomly choose a center O' for the washer (annulus) $\mathcal{A}$ in such a way that $\mathcal{A}$ has at least one point in common with $\mathcal{C}$. Let X be the random variable representing the number of marked points P_i that lie inside the annulus $\mathcal{A}$. We can express X as the sum of indicator random variables as follows:

$$X = \sum_{i=1}^{650} X_i, \quad \textit{where } X_i = \begin{cases} 1, & \textit{if } P_i \in \mathcal{A} \\ 0, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

The expectation of the random variable X_i is given by

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_i] &= 1 \cdot \mathbb{P}[X_i = 1] + 0 \cdot \mathbb{P}[X_i = 0] = \mathbb{P}[X_i = 1] \\ &= \frac{Area(\mathcal{A})}{Area(\mathcal{C})} = \frac{3^2 \cdot \pi - 2^2 \cdot \pi}{16^2 \pi} = \frac{5}{256}. \end{aligned}$$

Using the Linearity of Expectation, we obtain:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{650} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{650} \frac{5}{256} = 650 \cdot \frac{5}{256} = \frac{3250}{256} > 11.$$

Since X must be an integer, there must exist a position of the center of $\mathcal{A}$ such that $X \geqslant 12$, i.e., there exists an annulus that covers at least 12 marked points. Thus, $n \leqslant 12$.

Answer: 12.