INTERNATIONAL OLYMPIAD OF TEACHERS AND TRAINERS

Математика. Мұғалімдер лигасы

Сіздерге екі бөлімнен тұратын тапсырмалар ұсынылады:
I. «Математикалық бөлім» *(* ***№1–№4*** *тапсырмалар шығаруға).*
II. «Әдістемелік бөлім» *(* ***№5–№7*** *тапсырмалар мұғалімнің күнделікті жұмысына бағытталған).*

Байқау ұзақтығы: ***4 сағат.***

Әр тапсырма ***10 ұпаймен*** *бағаланады.*

I. *Математикалық бөлім*

1.ТЕҢДЕУ. Теңдеуді шешіңіз: $3^x = 2^{2x-1} + 1$.

2.ОЙЫН. Тақтада 1,2,3,...,2025 сандары жазылған. Батырхан мен Арман әрбір жүрісте тақтада жазылған екі санды өшіріп, орнына олардың k-ға бөлінген көбейтіндісін жазады, мұндағы k - жүріс нөмірі. Ойын тақтада бір сан қалғанша жалғаса береді. Ойын соңында тақтада жұп сан қалса, онда бұл ойында Батырхан жеңеді. Кері жағдайда Арман жеңеді. Ойынды Батырхан бастайды. Дұрыс ойында кім жеңіске жетеді?

3.ТЕҢСІЗДІК. $a > 0$ және $b > 0$ сандары үшін

$$\sqrt{9 + a^2 - 3\sqrt{3}a} + \sqrt{a^2 + b^2 - ab\sqrt{3}} + \sqrt{b^2 + 16 - 4\sqrt{3}b} \geqslant 5.$$

теңсіздігін дәлелдеңіз. a мен b-ның қандай мәнінде теңдік орындалады?

4.ПАРАЛЛЕЛЬ ТҮЗУЛЕР. Сүйірбұрышты ABC үшбұрышында CF және BE биіктіктері H нүктесінде қиылысады. ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің A нүктесі жатпайтын BC доғасынан P нүктесі алынған. $AR \parallel CP$ болатындай BE түзуінен R нүктесі алынған. CF түзуі A нүктесі арқылы өтетін, BP түзуіне параллель түзуді Q нүктесінде қияды. $QR \parallel AP$ болатынын дәлелдеңіз.

II. *Әдістемелік бөлім*

№5–7 тапсырмаларда **«есеп»** шартында немесе оқушының **«шешімі»** мен **«жауабында»** математикалық қателер жіберілуі мүмкін. Егер **«есептің»** шарты қате болса, онда қатені түсіндіріңіз.Егер қате оқушының **«шешімінде»** жіберілсе, онда барлық қателерді көрсетіңіз және есептің дұрыс шешімін келтіріңіз.

5.ӨРНЕКТІҢ МӘНІ.

Есеп

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}=4$ және $\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{a}=5$ теңдіктері орындалатындай a,b,c нақты сандары берілген. $\dfrac{a^3}{b^3}+\dfrac{b^3}{c^3}+\dfrac{c^3}{a^3}$ өрнегінің мәнін табыңыз.

Төменде **оқушының «шешімі»** келтірілген.

Оқушының «шешімі»

$\dfrac{a}{b}=x,\ \dfrac{b}{c}=y,\ \dfrac{c}{a}=z$ *болсын. Онда* $xyz=1$ *болатынын байқаймыз.*

Жаңа айнымалыларда есеп шартын жазайық: $x+y+z=4$ *және* $xy+yz+zx=5$. *Белгілі теңдікті қолдансақ*

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}-3=\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}-3\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=$$

$$=x^3+y^3+z^3-3xyz=$$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=$$

$$=(x+y+z)((x+y+z)^2-3(xy+yz+zx))=$$

$$=4\cdot(4^2-3\cdot 5)=4.$$

Бұдан $\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}=7$ *болатыны шығады.*

«Жауабы»: 7.

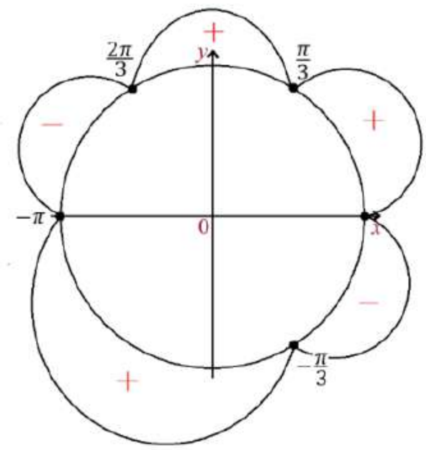
6.ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢСІЗДІК.

Есеп

Теңсіздікті шешіңіз:

$$\left(\sin\frac{x}{2}+1\right)\left(2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right)(2\sin x-\sqrt{3})(\cos x-1)>0$$

Төменде **оқушының «шешімі»** келтірілген.



Оқушының «шешімі»

$\left(\sin\frac{x}{2}+1\right)\left(2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right)(2\sin x-\sqrt{3})(\cos x-1)=0$ *теңдеуін шешеміз.*

1) $\sin\frac{x}{2}=-1 \implies x=-\pi+2\pi k,\ \forall k\in\mathbf{Z}.$

2) $\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \implies x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$ *или* $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \forall k\in\mathbf{Z}.$

3) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2} \implies x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$ *или* $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \forall k\in\mathbf{Z}.$

4) $\cos x=-1 \implies x=2\pi k,\ \forall k\in\mathbf{Z}.$

Табылған түбірлерді бірлік шеңберде белгілеп, аралықтардағы таңбаларын анықтап, жауабын аламыз.

«Жауабы».

$$x\in\left(-\pi+2\pi k;-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)\cup\left(2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k;\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right),\ k\in\mathbf{Z}.$$

7.ШАР,КОНУС ЖӘНЕ ПРИЗМАНЫҢ КОМБИНАЦИЯСЫ.

Есеп

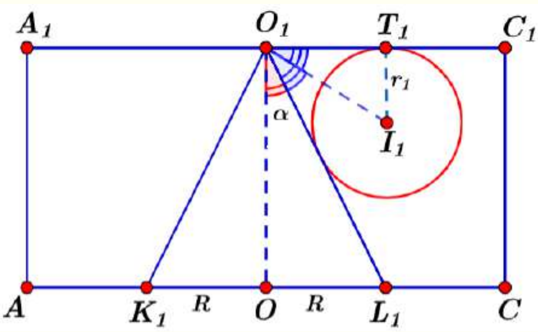
Табаны $ABCD$ - ромб болатын $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тік призманың әрбір үшжақты бұрышына іштей шар сызылған және ол шарлар төбесі $O = A_1C_1 \cap B_1D_1$ болатын, табаны $ABCD$ ромбына іштей сызылған болатын конуспен жанасады. Егер $AC = 8,\ BD = 6$ және $AA_1 = 1$ болса, шарлардың радиусын табыңыз.

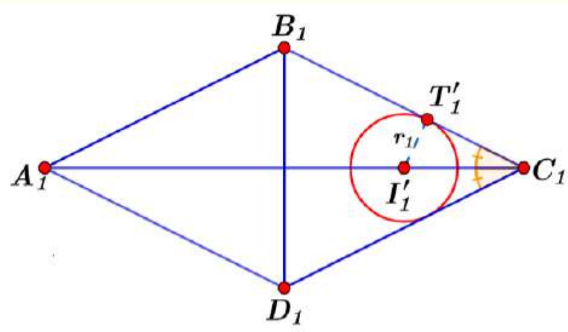
Төменде **оқушының «шешімі»** келтірілген.

«Решение» ученика

Конусты жанайтын әрбір үшжақты бұрышқа іштей шар сызуға болады. Барлық жағдайда 8 шар болады. Олардың әрбір екеуі өзара тең. Демек, 4 жағдай қарастырамыз:

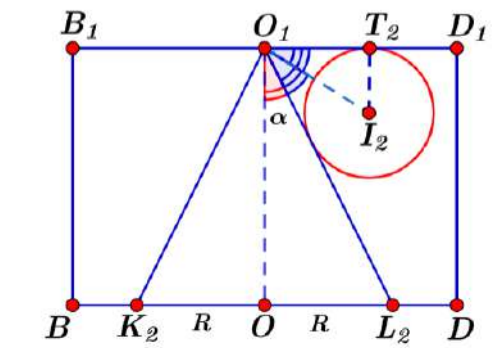
№1 Жағдай. $\angle B_1C_1I = \beta$ *болсын. Онда* $\sin\beta = \frac{3}{5}, IC_1 = \frac{r_1}{\sin\beta} = \frac{5r_1}{3}$.

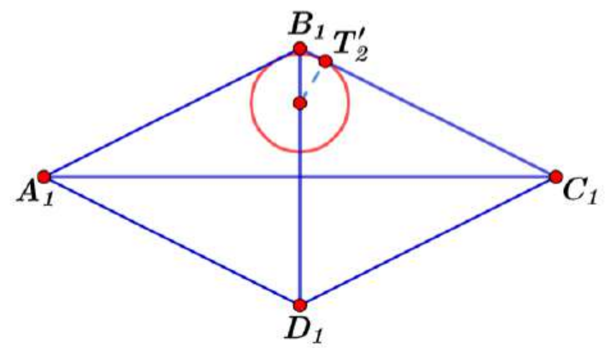




$$\frac{r_1}{4 - \frac{5r_1}{3}} = \operatorname{tg}\left(\frac{90^o - \alpha}{2}\right) = \frac{\sin(90^o - \alpha)}{1 + \cos(90^o - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} = \frac{1}{5} \Longrightarrow r_1 = \frac{3}{5}$$

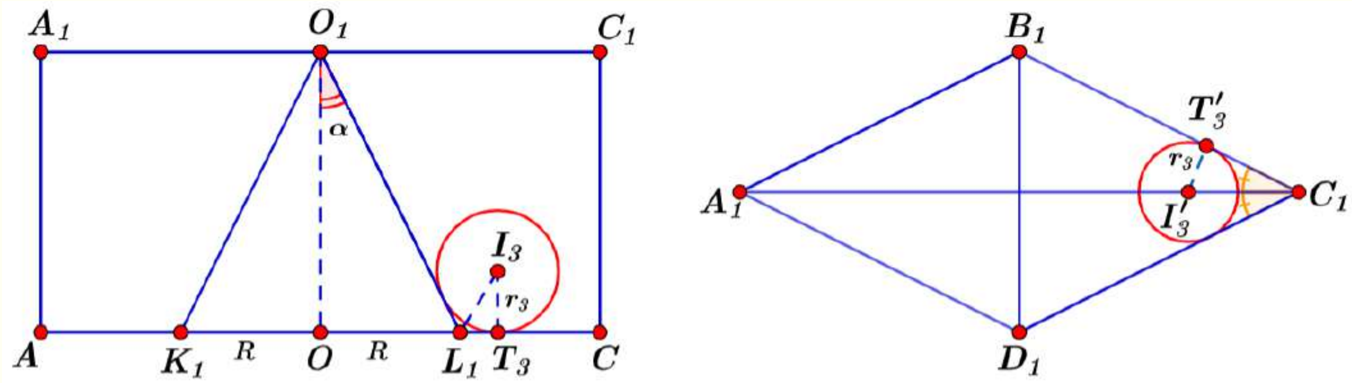
№2 Жағдай.





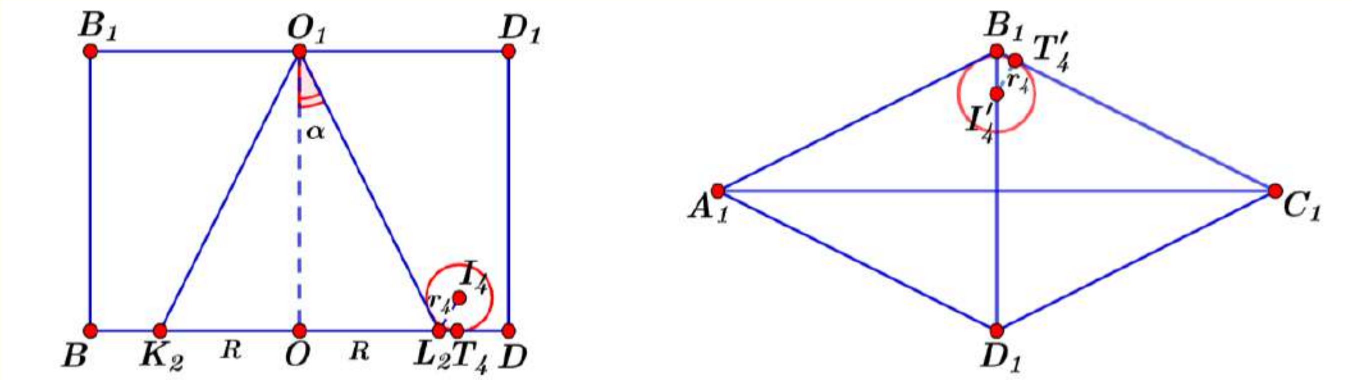
$$\frac{r_2}{3 - \frac{5r_2}{4}} = \frac{1}{5} \Longrightarrow r_2 = \frac{12}{25}$$

№3 Жағдай.



$$\frac{r_3}{\frac{8}{5} - \frac{5r_3}{3}} = \frac{1}{5} \implies r_3 = \frac{6}{25}$$

№4 Жағдай.



$$\frac{r_4}{\frac{3}{5} - \frac{5r_4}{4}} = \frac{1}{5} \implies r_4 = \frac{12}{125}$$

«Жауабы». $\frac{3}{5}$, $\frac{12}{25}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{12}{125}$.

Математика. Лига учителей

Вам предлагаются два блока заданий:

I. «Математический блок» *(задачи* ***№1–№4*** *для решения).*

II. «Методический блок» *(задачи* ***№5–№7****, включает в себя задания, моделирующие повседневную работу учителя).*

Продолжительность конкурса: ***4 часа.***

Каждое задание оценивается в ***10 баллов.***

I. *Математический блок*

1.УРАВНЕНИЕ. Решите уравнение: $3^x = 2^{2x-1} + 1$.

2.ИГРА. На доске написаны натуральные числа 1,2,3,...,2025. Арман и Батырхан по очереди стирают два числа и вместо них записывают их произведение, деленное на k, где k - номер хода. Игра продолжается пока в конце не останется одно число, если оно чётное, то побеждает Батырхан, в противном случае - Арман. Кто победит при правильной игре, если начинает игру Батырхан?

3.НЕРАВЕНСТВО.Для чисел $a > 0$ и $b > 0$ докажите неравенство:

$$\sqrt{9 + a^2 - 3\sqrt{3}a} + \sqrt{a^2 + b^2 - ab\sqrt{3}} + \sqrt{b^2 + 16 - 4\sqrt{3}b} \geqslant 5.$$

При каких значениях a и b выполняется равенство?

4.ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ. В остроугольном треугольнике ABC высоты CF и BE пересекаются в точке H.На дуге BC окружности, описанной около треугольника ABC, которая не содержит точку A, выбрана точка P. На прямой BE взята точка R так, что $AR \parallel CP$. Прямая CF пересекает прямую, проходящей через точку A и параллельную к прямой BP в точке Q. Докажите, что $QR \parallel AP$.

II. *Методический блок*

В заданиях **№5–7** могут содержаться математические ошибки (как в условиях **«задач»**,так и в **«ответах»** и **«решениях»**). Если некорректно условие **«задачи»**, то объясните, почему это так. Если неверно только **«решение»**, то укажите все ошибки и приведите верное решение.

5.ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ.

Задача

Вещественные числа a,b,c таковы, что $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}=4$ и $\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{a}=5$.

Найдите значение выражения $\dfrac{a^3}{b^3}+\dfrac{b^3}{c^3}+\dfrac{c^3}{a^3}$.

Ниже приведено **«решение» ученика**.

«Решение» ученика

Пусть $\dfrac{a}{b}=x$, $\dfrac{b}{c}=y$, $\dfrac{c}{a}=z$. *Сразу же заметим, что* $xyz=1$.

Перепишем условие задачи в новых обозначениях: $x+y+z=4$ *и* $xy+yz+zx=5$. *Тогда воспользуемся известным равенством*

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}-3=\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}-3\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=$$

$$=x^3+y^3+z^3-3xyz=$$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=$$

$$=(x+y+z)((x+y+z)^2-3(xy+yz+zx))=$$

$$=4\cdot(4^2-3\cdot5)=4.$$

Откуда следует, что $\dfrac{a^3}{b^3}+\dfrac{b^3}{c^3}+\dfrac{c^3}{a^3}=7$.

«Ответ»: 7.

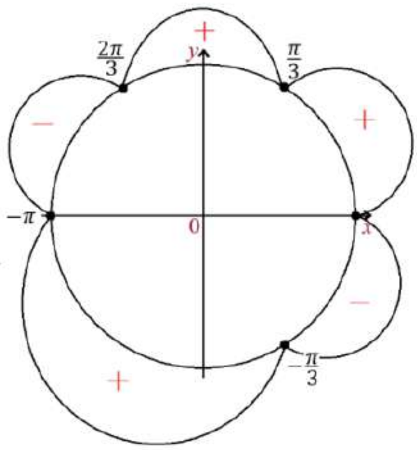
6.ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО.

Задача

Решите неравенство:

$$\left(\sin\frac{x}{2}+1\right)\left(2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right)(2\sin x-\sqrt{3})(\cos x-1)>0$$

Ниже приведено **«решение» ученика**.



«Решение» ученика

Решим уравнение $\left(\sin\frac{x}{2}+1\right)\left(2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right)(2\sin x-\sqrt{3})(\cos x-1)=0.$

1) $\sin\frac{x}{2}=-1 \implies x=-\pi+2\pi k,\ \forall k\in\mathbf{Z}.$

2) $\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \implies x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$ *или* $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \forall k\in\mathbf{Z}.$

3) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2} \implies x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$ *или* $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \forall k\in\mathbf{Z}.$

4) $\cos x=-1 \implies x=2\pi k,\ \forall k\in\mathbf{Z}.$

На единичной окружности (см рисунок) отметим все найденные корни, определим знаки на промежутках и получим окончательный ответ.

«Ответ».

$$x\in\left(-\pi+2\pi k;-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)\cup\left(2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k;\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right),\ k\in\mathbf{Z}.$$

7.КОМБИНАЦИЯ ШАРА,КОНУСА И ПРИЗМЫ.

Задача

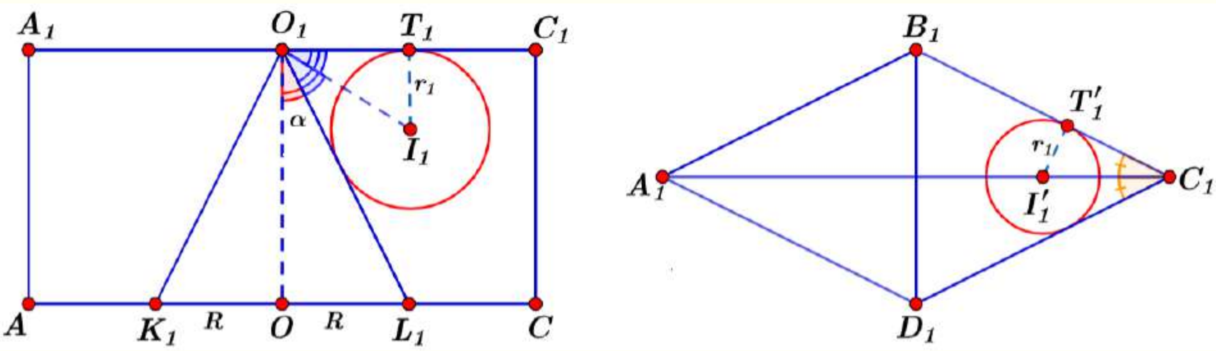
В каждый из трехгранных углов прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в основании которой $ABCD$ - ромб, $AC = 8$, $BD = 6$ и $AA_1 = 1$, вписан шар, касающийся конуса с вершиной в точке $O = A_1C_1 \cap B_1D_1$ и основанием, вписанным в ромб $ABCD$. Найдите радиусы шаров.

Ниже приведено **«решение» ученика**.

«Решение» ученика

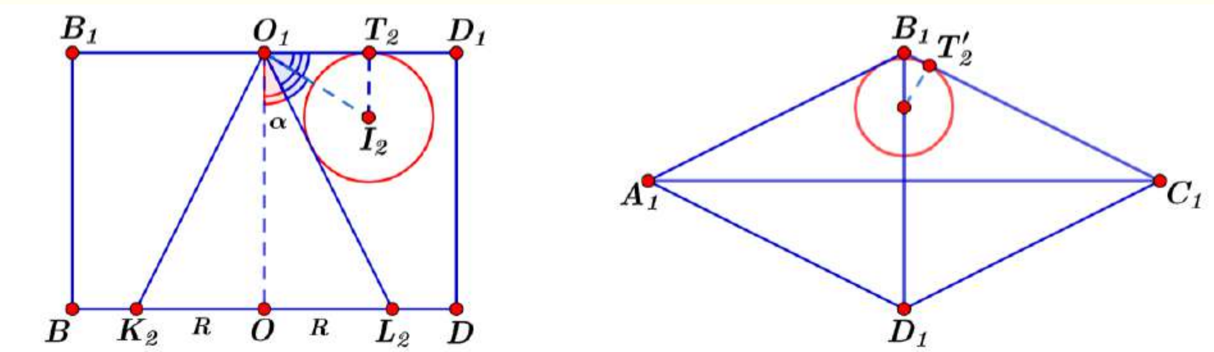
В каждый из трехгранных углов призмы можно вписать шар, касающийся конуса. Восемь получающихся шаров разбиваются на четыре пары одинаковых. Следовательно, рассмотрим четыре случая:

Случай №1. *Пусть* $\angle B_1C_1I_1' = \beta$. *Тогда* $\sin\beta = \frac{3}{5}$, $I_1'C_1 = \frac{r_1}{\sin\beta} = \frac{5r_1}{3}$.



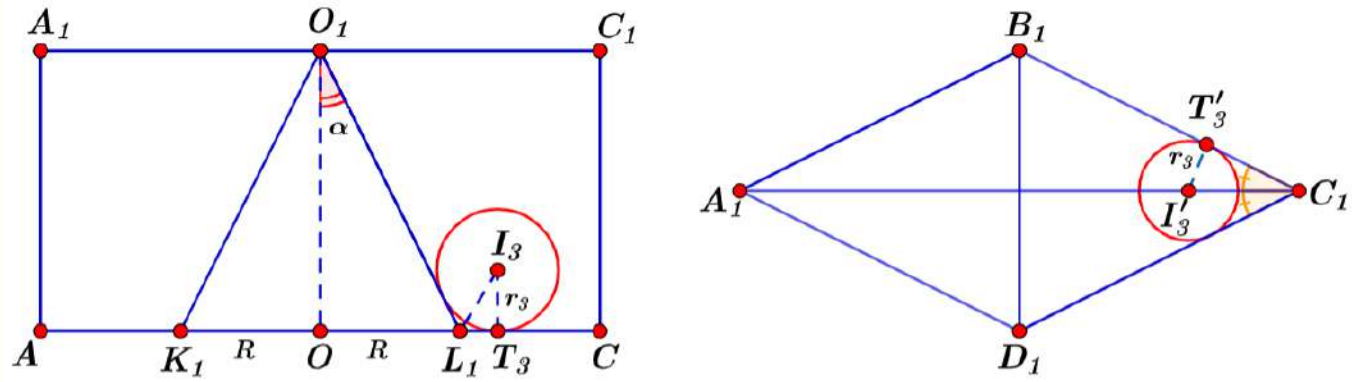
$$\frac{r_1}{4 - \frac{5r_1}{3}} = \operatorname{tg}\left(\frac{90^o - \alpha}{2}\right) = \frac{\sin(90^o - \alpha)}{1 + \cos(90^o - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} = \frac{1}{5} \implies r_1 = \frac{3}{5}$$

Случай №2.



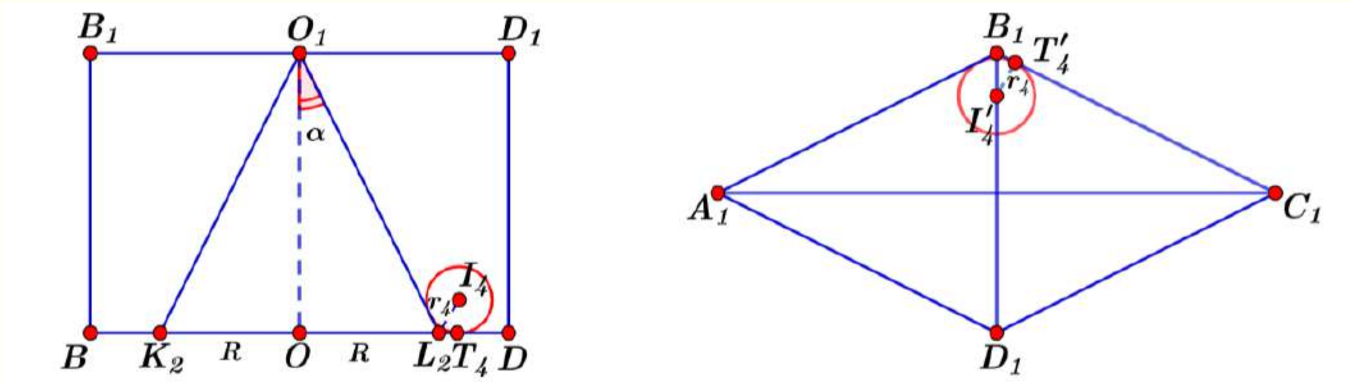
$$\frac{r_2}{3 - \frac{5r_2}{4}} = \frac{1}{5} \implies r_2 = \frac{12}{25}$$

Случай №3.



$$\frac{r_3}{\frac{8}{5}-\frac{5r_3}{3}}=\frac{1}{5} \implies r_3=\frac{6}{25}$$

Случай №4.



$$\frac{r_4}{\frac{3}{5}-\frac{5r_4}{4}}=\frac{1}{5} \implies r_4=\frac{12}{125}$$

«Ответ». $\frac{3}{5}$, $\frac{12}{25}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{12}{125}$.

Mathematics. Teachers league.

You are offered two sets of problems:

I.«Mathematical Set» (problems **№1-№4** to solve)

II.«Methodical Set» (problems **№5-№7**, includes tasks simulating a Math teacher professional activity)

Time allowed: **4 hours**

Each task is worth **10 points**

I. *Mathematical Set*

1.EQUATION. Solve the equation: $3^x = 2^{2x-1} + 1$.

2.GAME. On the board, the natural numbers 1,2,3,...,2025 are written. Arman and Batyrkhan take turns erasing two numbers and replacing them with their product divided by k, where k is the current turn number. The game continues until only one number remains. If the final number is even, Batyrkhan wins; otherwise, Arman wins. Who will win with optimal play if Batyrkhan starts the game?

3.INEQUALITY. For positive numbers a and b, prove the inequality:

$$\sqrt{9 + a^2 - 3\sqrt{3}a} + \sqrt{a^2 + b^2 - ab\sqrt{3}} + \sqrt{b^2 + 16 - 4\sqrt{3}b} \geqslant 5.$$

Under what condition does equality hold?

4.PARALLEL LINES. In an acute triangle ABC, the altitudes CF and BE intersect at point H. On the arc BC of the circumcircle of ABC, which does not contain point A, a point P is chosen. On line BE, a point R is selected such that $AR \parallel CP$. The line CP intersects the line passing through point A and parallel to BP at point Q. Prove that $QR \parallel AP$..

II. *Methodical Set*

Tasks **№5-7** may contain mathematical errors (both in the conditions of **«problems»**, and in **«answers»** and **«solutions»**). If the condition of the «problem» is incorrect, then explain why this is so. If only the «solution» is incorrect, then indicate all the errors with explanations and give the correct solution.

5.VALUE OF THE EXPRESSION.

Problem

Given that the real numbers a,b,c satisfy $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=4$ and $\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}=5$.

Find the value of the expression $\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}$.

Below you can find **«solution»** to the problem given by a student.

The student's «solution»

Let $\frac{a}{b}=x, \frac{b}{c}=y$ *and* $\frac{c}{a}=z$. *Notice that* $xyz=1$. *Let's rewrite the problem's condition using these new notations:* $x+y+z=4$ *and* $xy+yz+zx=5$. *Then, we will use the well-known identity*

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}-3=\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}-3\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=$$

$$=x^3+y^3+z^3-3xyz=$$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=$$

$$=(x+y+z)((x+y+z)^2-3(xy+yz+zx))=$$

$$=4\cdot(4^2-3\cdot 5)=4.$$

From which it follows that $\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}=7$.

«Answer»: 7.

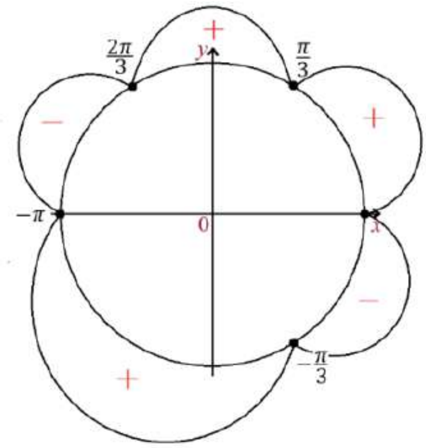
6.TRIGONOMETRIC INEQUALITY.

Problem

Solve the inequality:

$$\left(\sin\frac{x}{2}+1\right)\left(2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right)(2\sin x-\sqrt{3})(\cos x-1)>0$$

Below you can find **«solution»** to the problem given by a student.



The student's «solution»

Let's solve the equation:

$$\left(\sin\frac{x}{2}+1\right)\left(2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right)(2\sin x-\sqrt{3})(\cos x-1)=0.$$

1) $\sin\frac{x}{2}=-1 \implies x=-\pi+2\pi k,\ \forall k\in\mathbf{Z}.$

2) $\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \implies x=\frac{\pi}{3}+2\pi k \textit{ or } x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \forall k\in\mathbf{Z}.$

3) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2} \implies x=\frac{\pi}{3}+2\pi k \textit{ or } x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \forall k\in\mathbf{Z}.$

4) $\cos x=-1 \implies x=2\pi k,\ \forall k\in\mathbf{Z}.$

On the unit circle (see the diagram), we mark all the roots of the equation, assign the signs to the intervals, and obtain the answer.

«Answer».

$$x\in\left(-\pi+2\pi k;-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)\cup\left(2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k;\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right),\ k\in\mathbf{Z}.$$

7.A COMBINATION OF A SPHERE, A CONE, AND A PRISM.

Problem

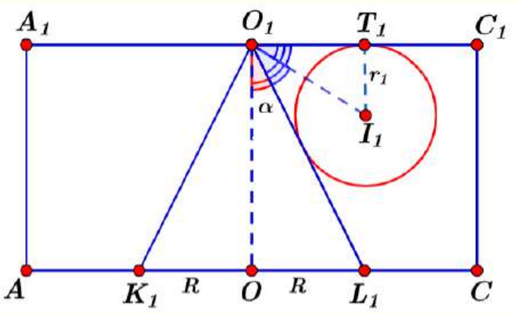
A sphere is inscribed in each of the trihedral angles of a right prism $ABCDA_1B_1C_1D_1$. The base $ABCD$ of the prism is a rhombus with diagonals $AC = 8$,$BD = 6$, and the height of the prism is $AA_1 = 1$. Each sphere is tangent to a cone with its vertex at the point $O = A_1C_1 \cap B_1D_1$, and its base inscribed in the rhombus $ABCD$. Find the radii of the spheres.

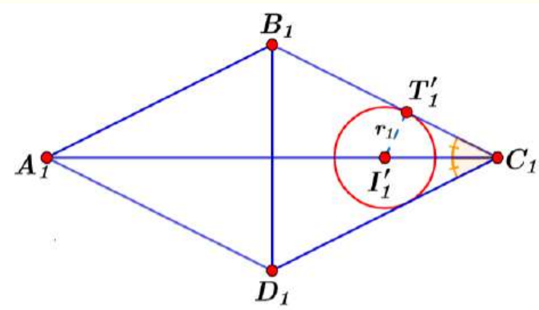
Below you can find **«solution»** to the problem given by a student.

The studen's «solution»

A sphere can be inscribed in each of the trihedral angles of the prism, and it is tangent to the cone. The eight resulting spheres are grouped into four pairs of identical spheres. Therefore, we will consider four cases:

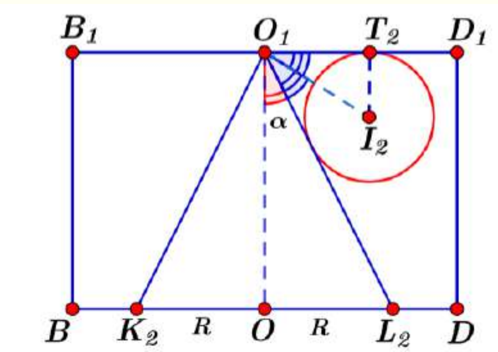
Case №1. *Let* $\angle B_1C_1I'_1 = \beta$. *Then* $\sin\beta = \frac{3}{5}$ *and* $I'_1C_1 = \frac{r_1}{\sin\beta} = \frac{5r_1}{3}$.

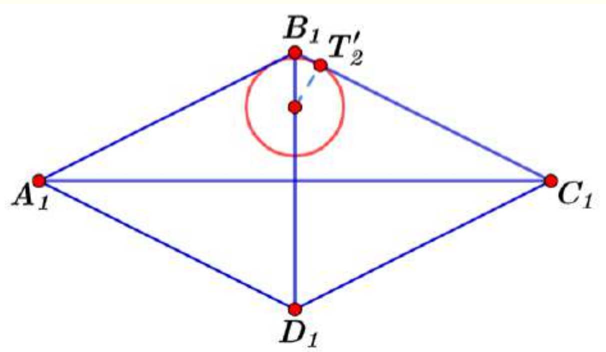




$$\frac{r_1}{4 - \frac{5r_1}{3}} = \operatorname{tg}\left(\frac{90^o - \alpha}{2}\right) = \frac{\sin(90^o - \alpha)}{1 + \cos(90^o - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} = \frac{1}{5} \implies r_1 = \frac{3}{5}$$

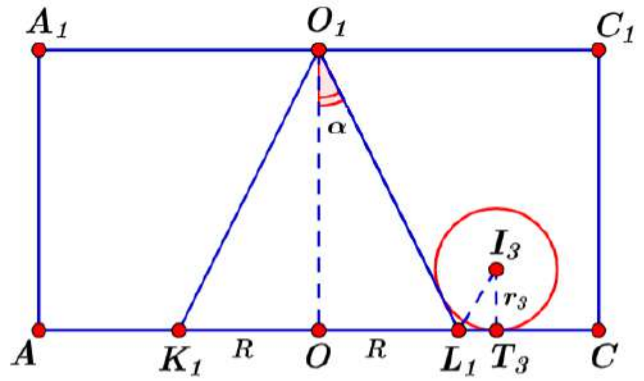
Case №2.

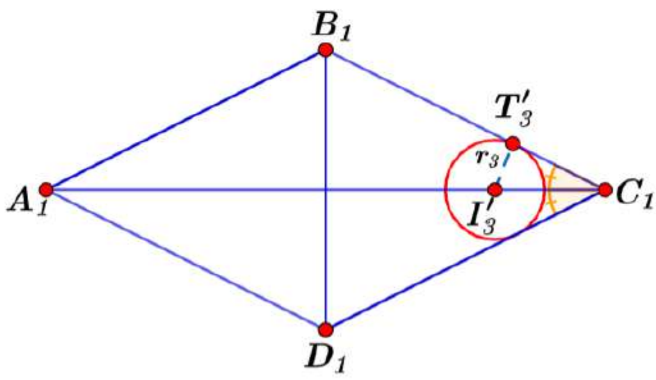




$$\frac{r_2}{3 - \frac{5r_2}{4}} = \frac{1}{5} \implies r_2 = \frac{12}{25}$$

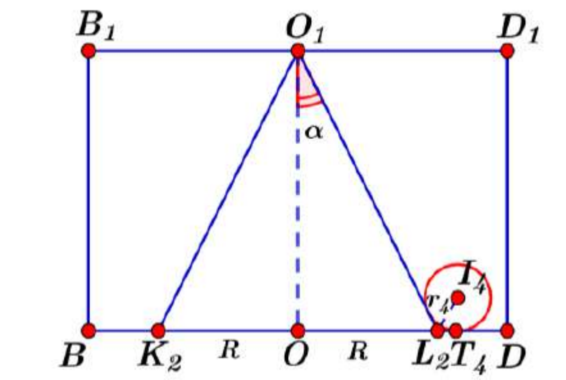
Case №3.

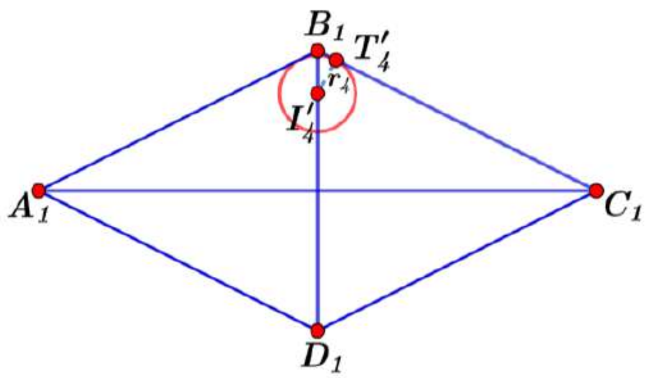




$$\frac{r_3}{\frac{8}{5}-\frac{5r_3}{3}}=\frac{1}{5} \implies r_3=\frac{6}{25}$$

Case №4.





$$\frac{r_4}{\frac{3}{5}-\frac{5r_4}{4}}=\frac{1}{5} \implies r_4=\frac{12}{125}$$

«Answer». $\frac{3}{5}$, $\frac{12}{25}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{12}{125}$.