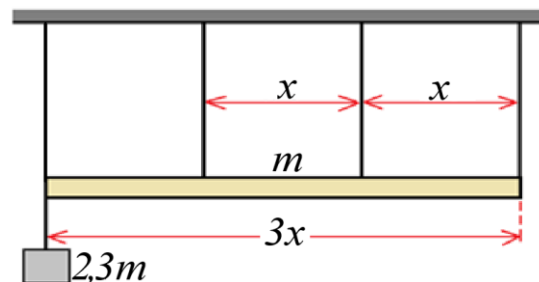


1-тапсырма. Шынығу. (10 ұпай)

Бірдей төрт жіппен төбеге ілінген массасы m біртекті шыбықтың сол ұшына массасы $2,3m$ жүк ілінген (суретті қараңыз). Жіптердің керілу күштерін анықтаңыз. Жіптер жеңіл әрі қатты.



2-тапсырма. Зымыран ұшыру. (10 ұпай)

Жер бетінен массасы m зымыран ұшырылады. Зымыранның ұшу кезіндегі жанармайдың массалық шығымы $\frac{dm}{dt} = \mu$. Жану өнімдерінің ағып шығуы адиабаталық түрде өтеді. Зымыран ішіндегі газ температурасы T_1 , қысым p_1 және зымыраннан шықандағы газ қысымы p_2 болса, зымыранның ұшу кезіндегі үдеуін анықтаңыз. Газдың мольдік массасы M , адиабаталық көрсеткіші γ .

3-тапсырма. Тұтқыр сұйықтықтың ламинарлық ағыны. (10 ұпай)

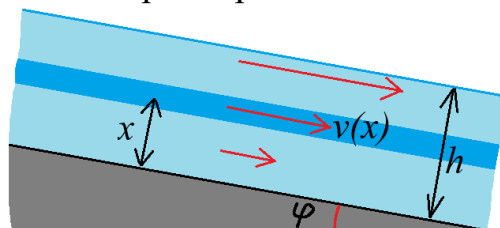
Нақты сұйықтық қозғалысы кезінде, оның қабаттары арасында, қабаттардың бетіне жанама бағытталған ішкі үйкеліс күштері пайда болады:

$$F = \eta S \frac{dv}{dx}.$$

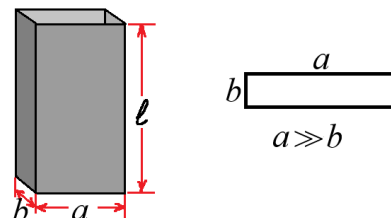
Мұндағы dv/dx - ағып жатқан сұйықтықтың жылдамдық градиенті, S - жанасатын сұйықтық қабаттарының ауданы, ал η - динамикалық тұтқырлық коэффициенті.

Келесі есептерде тұтқыр сұйықтықтың ламинарлық ағыны қарастырылады.

а) Су тікбұрышты көлденең қимасы бар көлбеу канал арқылы ағады. Каналдың көлбеу бұрышы φ , ені a , ал судың тереңдігі h . Судың тұтқырлығы мен тығыздығы сәйкесінше η және ρ . Ағын судың Q шығымын анықтаңыз (уақыт бірлігінде ағып өтетін су көлемі).



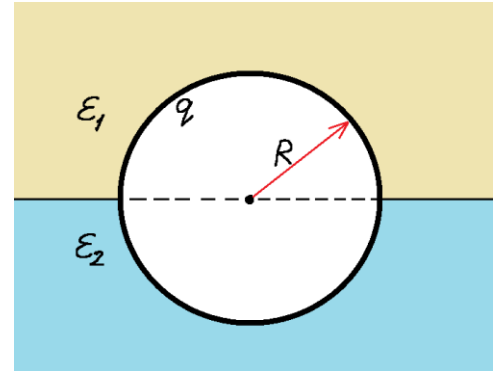
б) Ұзындығы ℓ түтіктің өлшемдері $a \times b$ ($a \gg b$) болған тікбұрышты көлденең қимасы бар (суретті қараңыз). Тігінен орналасқан түтікті тұтқыр сұйықтықпен толтырып, түтіктің астыңғы жағын толық ашса, сұйықтықтың түтіктен толығымен ағып кетуі қанша уақытты алады? Сұйықтықтың тығыздығы ρ және тұтқырлығы η .



4-тапсырма. Шекарадағы цилиндр. (10 ұпай)

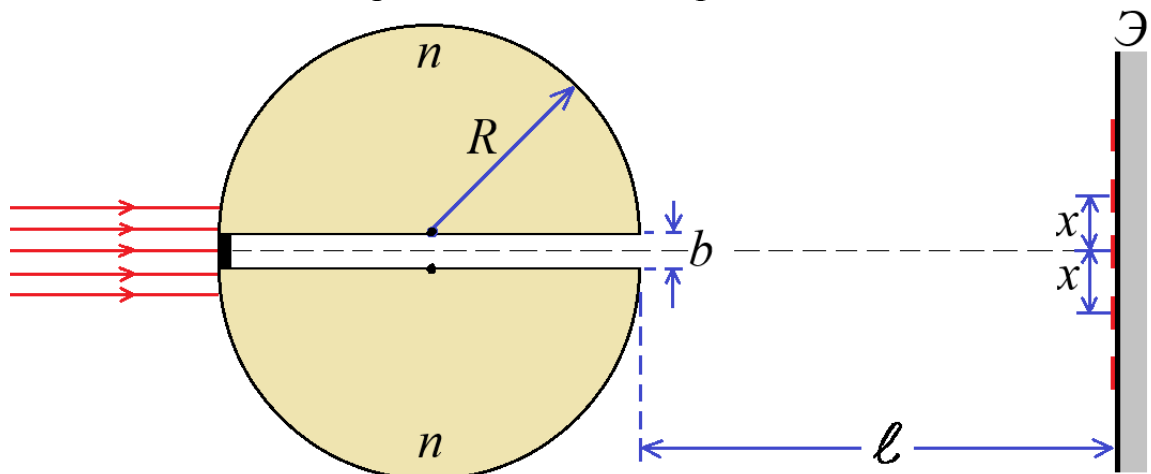
Радиусы R және бірлік ұзындығының заряды q болған, біртекті өте ұзын өткізгіш цилиндр өтімділігі ε_1 және ε_2 болған екі диэлектриктердің шекарасында орналасқан (суретті қараңыз). Цилиндрдің осі шекара бойында орналасқан. Осы жүйе үшін келесі шамаларды анықтаңыз:

- диэлектриктердегі электр өрісінің потенциалын;
- диэлектриктердегі электр өрісінің кернеулігін;
- цилиндрдің бірлік ұзындығына әрекет ететін күшті.



5-тапсырма. Сәуленің жолын тап! (10 ұпай)

Радиусы $R=10$ см және сыну көрсеткіші $n=4/3$ болған шыны шарды диаметрі бойынша екіге бөліп, жартышарларды бір-бірінен $b=1$ мм қашықтыққа алшақтатып орналастырады. Жіңішке монохромдық жарық сәулесі екі жартылай шарды жарықтандырады. Оларды бөліп тұрған саңылауға жарық өтпейтін материал қойылған, сондықтан саңылақ арқылы шыққан жарық экранға жетпейді. Соның нәтижесінде, экранда $\ell=2,3$ м қашықтықта (суретті қараңыз) байқалатын интерференциялық көрініс тек екі жартылай шардан шыққан жарықтан пайда болады. Кескіндегі көршілес жолақтардың арақашықтығы $x=1,3$ мм болса, жарық көзінің толқын ұзындығы қанша?





6-тапсырма. 1D Бозе-Эйнштейн конденсатындағы солитондар. (10 ұпай)

Гросс-Питаевский теңдеуі (ГПТ) бозондардан тұратын өзара әрекеттесетін кванттық газдарды сипаттау үшін жиі қолданылады:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2} + V(\vec{r}) + g|\psi(\vec{r})|^2 \right) \psi(\vec{r}) = \mu \psi(\vec{r})$$

мұндағы $V(\vec{r})$ - сыртқы потенциал (атом тұзағы), g - бозондар арасындағы өзара әрекеттесу тұрақтысы, μ - химиялық потенциал, ал $\psi(\vec{r})$ - толқындық функция. Бұл әдетте сандық әдіспен шешілетін өте күрделі бейсызық теңдеу.

1D-де бұл теңдеуді аналитикалық жолмен шешуге болады, бұл солитондарды береді. $V(\vec{r}) = 0$, $g > 0$ шарттары орындалатын жағдай үшін, ГПТ-ін өлшемсіз бірліктерде келесі түрде жазуға болады:

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi + \psi(1 - \psi^2) = 0$$

а) $\psi(x)=1$ осы теңдеудің шешімі болатынын көрсетіңіз. Бұл шешім конденсаттың негізгі күйін сипаттайды.

Классикалық механикамен ұқсастықты қолдана отырып, шекаралық шарт $|\psi| \rightarrow 1$, $x \rightarrow \pm\infty$ кезінде тривиалды емес шешімді табайық..

б) Бұл теңдеудің консервативті өрістегі массасы $m=1$ болған материалдық нүктенің теңдеуіне ұқсас екенін көрсетіңіз. Осы өрістің потенциалын анықтаңыз.

с) Сәйкес потенциалды сызыңыз және сәйкес нүктенің қозғалысын сипаттаңыз. Интегралдық тұрақты C жүйенің толық энергиясымен қалай байланысты болуы керек? Жүйенің толық энергиясын анықтаңыз.

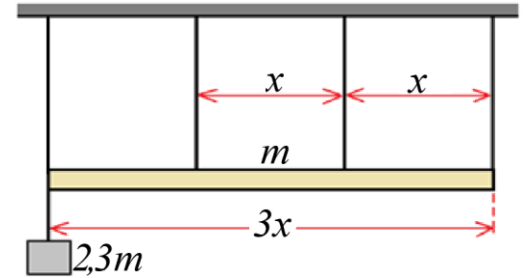
д) Энергияның сақталу заңын қолданып, қозғалыс теңдеуін интегралдап, $\psi(x)$ -ті анықтаңыз.

е) Интегралдау кезінде тағы бір тұрақты алынды. Оның физикалық мағынасы қандай? $|\psi(x)|^2$ тығыздық профилін салыңыз. Солитонның тығыздық профилін тривиалды шешімнің тығыздық профилімен салыстырыңыз ($\psi(x)=1$).

Мұндай солитонның неге «қараңғы солитон» деп аталатынын түсіндіріңіз.

Problem-1. Warm-up. (10 points)

A load of mass $2.3m$ is attached to the left end of a uniform rod of mass m , which is suspended from the ceiling by four identical strings (see figure). Determine the tensions in the strings. The strings are light and inextensible.



Problem-2. Rocket launch. (10 points)

A rocket of mass m is launched from the surface of the Earth. The mass flow rate of the rocket's fuel at launch is $\frac{dm}{dt} = \mu$. The exhaust of the combustion products occurs adiabatically. Determine the acceleration of the rocket at launch if the temperature of the gas inside the rocket is T_1 , the pressure is p_1 , and the pressure of the gas at the nozzle exit is p_2 . The molar mass of the gas is M , and the adiabatic index is γ .

Problem-3. Laminar flow of a viscous fluid. (10 points)

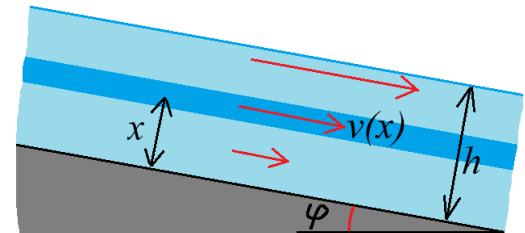
When a real fluid flows, internal friction forces arise between its layers, directed tangentially to the surfaces of the layers:

$$F = \eta S \frac{dv}{dx}.$$

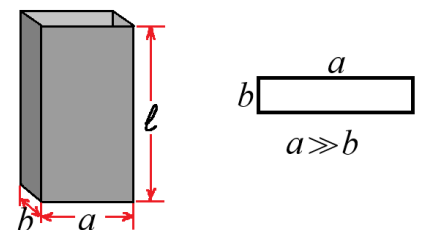
Here dv/dx is the velocity gradient of the flowing fluid, S is the area of contact between the fluid layers, and η is the coefficient of dynamic viscosity.

In the following problems, laminar flow of a viscous fluid is considered.

a) Water flows down an inclined channel with a rectangular cross section. The angle of inclination of the channel is φ , the width is a , and the depth of the water flow is h (see figure). The viscosity and density of water are η and ρ respectively. Determine the flow rate Q of the water (the volume of water flowing per unit time).



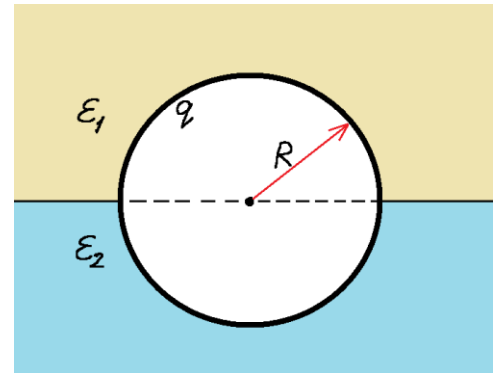
b) A tube of length ℓ has a rectangular cross section with dimensions $a \times b$, where $a \gg b$ (see figure). A vertically oriented tube is filled with a viscous liquid of density ρ and viscosity η . How long will it take for the liquid to drain completely from the tube if the bottom of the tube is fully opened?



Problem-4. Cylinder at an interface. (10 points)

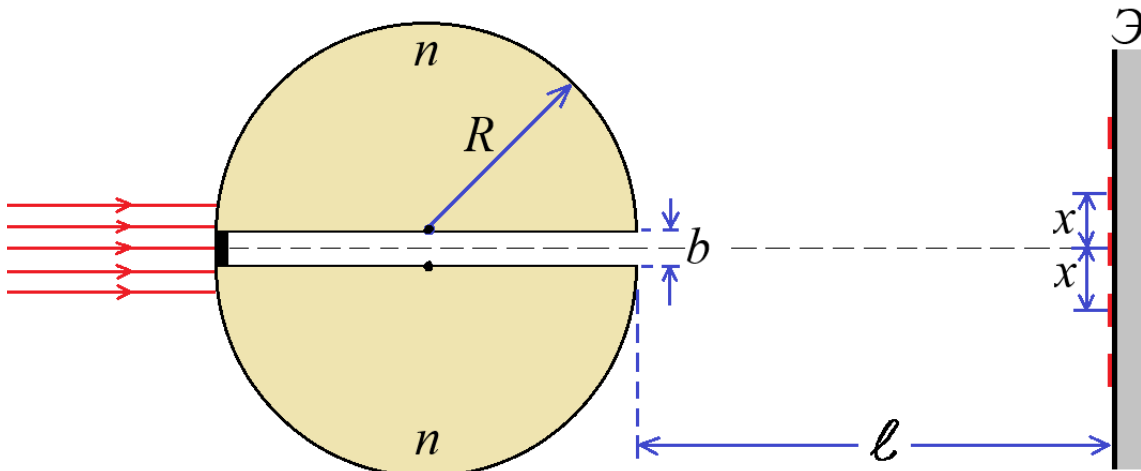
A conducting, very long cylinder of radius R , carrying a charge per unit length q is located at the interface between two dielectrics with permittivities ε_1 and ε_2 . The axis of the cylinder lies exactly on the interface. Determine:

- the electric potential in the dielectrics;
- the magnitude of the electric field strength in the dielectrics;
- the force acting on the cylinder per unit length.



Problem-5. Light path. (10 points)

A glass sphere of radius $R=10$ cm and refractive index $n=4/3$ is cut in half along its diameter, and the halves are separated by a distance $b=1$ mm. A thin beam of monochromatic light illuminates the halves of the sphere. A light-blocking material is placed in the small gap between the halves so that light from the gap does not reach the screen. As a result, the interference pattern observed on a screen located at a distance $\ell=2,3$ m (see figure) arises only from the light emerging from the two half-spheres. Determine the wavelength of the light source if the distance between adjacent fringes is $x=1.3$ mm.





Problem-6. Solitons in a 1-D Bose-Einstein Condensate. (10 points)

To describe interacting quantum gases consisting of bosons, the Gross–Pitaevskii equation (GPE) is often used:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2} + V(\vec{r}) + g|\psi(\vec{r})|^2 \right) \psi(\vec{r}) = \mu \psi(\vec{r})$$

where $V(\vec{r})$ is the external potential (trap for atoms), g is the interaction constant between bosons, μ is the chemical potential, $\psi(\vec{r})$ is the wave function. This is a fairly complicated nonlinear equation, usually solved numerically.

In 1D, this equation can be solved analytically to obtain solitons. We will consider the case $V(\vec{r}) = 0$, $g > 0$, and in dimensionless units the GPE can be written as:

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi + \psi(1 - \psi^2) = 0$$

a) Show that $\psi(x) = 1$ is a solution. This solution describes the ground state of the condensate.

Let's find a nontrivial solution with the boundary condition $|\psi| \rightarrow 1$, as $x \rightarrow \pm\infty$, using an analogy with classical mechanics.

b) Show that this equation is similar to the equation for a particle of mass $m = 1$ in a certain conservative potential. Find the potential of this field.

c) Draw the corresponding potential and describe the motion of the corresponding particle. How does the integration constant C relate to the total energy of the system? Determine the total energy of the system.

d) Using the law of energy conservation, integrate the equation of motion and find $\psi(x)$.

e) During integration, you obtain another constant. What is its physical meaning? Draw the density profile $|\psi(x)|^2$. Compare the density profile of the soliton with the profile of the trivial solution ($\psi(x) = 1$).

Explain why this soliton is called “the dark soliton.”