

**VIII International open creative contest for teachers and trainers
of the Olympic reserve of Mathematics, Physics and Computer Science
ALMATY, 10-13 January 2026**

Математика. Тренерлер лигасы

Сіздерге екі бөлімнен тұратын тапсырмалар ұсынылады:

I. «Математикалық бөлім» (№1–№4 есептерді шығаруға).

II. «Әдістемелік бөлім» (№5–№7 есептер, олимпиада жаттықтырушысының күнделікті жұмысына бағытталған).

Байқау ұзақтығы: 4 сағат. Әр есеп 10 ұпаймен бағаланады.

I. Математикалық бөлім

1. Оң x, y, z сандары үшін $x + y + z = 3$ теңдігі орындалады. Келесі теңсіздікті дәлелдеңіз:

$$\frac{x + y^2}{z + 1} + \frac{y + z^2}{x + 1} + \frac{z + x^2}{y + 1} \geq 3.$$

2. $ABCD$ ромбы берілген. M және N нүктелері сәйкесінше AB және CD қабырғаларының орталары болсын. E нүктесі — B нүктесінен AN түзуіне түсірілген перпендикулярдың табаны, ал F — C нүктесінен DM түзуіне түсірілген перпендикулярдың табаны. ACF және BED үшбұрыштарына сырттай сызылған шеңберлер X және Y нүктелерінде қиылысады. $XY \perp BC$ екенін дәлелдеңіз.

3. Бастапқыда S жиыны барлық түбірлері нақты және теріс болатын бірнеше келтірілген көпмүшелерден тұрады. S жиыны келесі ереже бойынша толықтырылады: егер $P(x) \in S$ және $Q(x) \in S$ болса, онда $P(x) + Q(x)$, $P(x) \cdot Q(x)$ және $P(Q(x))$ көпмүшелері де S жиынына қосылады. Уақыт өте келе жиында барлық түбірлері нақты және оң болатын көпмүше пайда болатындай бастапқы S жиыны табыла ма?

4. Егер программаға x натурал санын енгізсе, ол $k(x^2 - 1)$ мәнін қайтарады, мұндағы k — нәтиже толық квадрат болатындай ең кіші натурал сан. Алдымен программаға $n > 1$ натурал саны енгізілді, содан кейін алынған нәтиже қайтадан кіріске берілді, және осылай жалғасты. Программа 10 рет жұмыс істеді. Соңғы шыққан санның цифрлар саны бастапқы n санының цифрлар санынан 1024 есе көп болуы мүмкін бе?

II. Әдістемелік бөлім

5. Есепті бірнеше тәсілмен шешу.

Тапсырма: Берілген есептің үш түрлі шешу жолын көрсетіңіз.

Есеп: Төртбұрыштың төрт бұрышының синустары өзара тең. Төртбұрыштың кем дегенде екі қабырғасы тең екенін дәлелдеңіз.

6. Координация.

Тапсырма: Оқушы алған нәтижені қолданып, есептің шешімін қалай аяқтауға болатынын көрсетіңіз. Координация кезінде оқушының алға жылжуын бағалау бойынша негізделген ұсыныстарыңызды беріңіз (олимпиадада есептің толық шешімі үшін әдеттегідей 7 ұпай беріледі).

Есеп: Егер санды екі натурал санның квадраттарының қосындысы түрінде кем дегенде 2026 әр түрлі тәсілмен жазуға болатын болса, оны *ерекше* сан деп атаймыз. Ерекше сандардың шексіз көп екенін дәлелдеңіз.

Төменде оқушы ұсынған шешімнің басы берілген:

« $4k + 1$ түріндегі жай сандарды қарастырайық. Ферма-Эйлер теоремасы бойынша кез келген осындай жай сан екі квадраттың қосындысы түрінде жалғыз тәсілмен жазылады. Алғашқы n дана $p_1, \dots, p_n \equiv 1 \pmod{4}$ жай сандарын алайық...»

7. Қателерді іздеу.

Тапсырма: Шешімдегі логикалық қателерді тексеріңіз. Егер шешім дұрыс болмаса, барлық қателерді көрсетіп, дұрыс шешімін келтіріңіз.

Есеп: Бірлік пен Ерлік кезектесіп 1001×1001 тақтасының ұяшықтарына фишкалар қояды, ойынды Бірлік бастайды. Жүрісінен кейін қандай да бір жатық (горизонталь) немесе тік (вертикаль) қатарда 3 фишка пайда болған ойыншы жеңіледі. Дұрыс ойында кім жеңеді?

Ұсынылған шешім: Әр жол мен әр баған үшін бастапқы мәні 2-ге тең есептегіштер (counter) енгізейік. Фишка i -ші жол мен j -ші бағанның қиылысуына қойылғаннан кейін, осы жол мен бағанның есептегіштерінен бірді азайтамыз. Қандай да бір есептегіш 0-ге тең болған кезде ойын аяқталады.

Фишканы тек жол мен бағанның есептегіштері 0-ден үлкен болған жағдайда ғана қоюға болады деп есептейік. Әр жүріс сайын барлық есептегіштердің қосындысы дәл 2-ге азаяды. Бұл ретте жолдар бойынша есептегіштердің қосындысы әрқашан бағандар бойынша есептегіштердің қосындысына тең болады.

Бастапқыда барлық есептегіштердің жалпы қосындысы $1001 \cdot 2 \cdot 2$ -ге тең. Ойыншылар қосынды 0-ден үлкен болғанша жүріс жасай алады. Демек, бірінші ойыншы жеңіледі: екінші ойыншының соңғы жүрісінен кейін жалпы қосынды $1001 \cdot 2$ болады (бұл жерде қате болуы мүмкін), яғни келесі жүрісте бірінші ойыншы міндетті түрде есептегіштердің бірін нөлге айналдырады.

Жауабы: Ерлік жеңеді.

**VIII International open creative contest for teachers and trainers
of the Olympic reserve of Mathematics, Physics and Computer Science
ALMATY, 10-13 January 2026**

Математика. Лига тренеров

Вам предлагаются два блока заданий:

I. «Математический блок» (задачи №1–№4 для решения).

II. «Методический блок» (задачи №5–№7, включает в себя задания, моделирующие повседневную работу тренера олимпийского резерва).

Время конкурса: **4 часа**. Каждое задание оценивается в **10 баллов**.

I. Математический блок

1. Положительные числа x, y, z таковы, что $x + y + z = 3$. Докажите неравенство

$$\frac{x + y^2}{z + 1} + \frac{y + z^2}{x + 1} + \frac{z + x^2}{y + 1} \geq 3.$$

2. Дан ромб $ABCD$. Пусть M и N — середины сторон AB и CD соответственно. Точка E — основание перпендикуляра из точки B на прямую AN , а F — основание перпендикуляра из точки C на прямую DM . Описанные окружности треугольников ACF и BED пересекаются в точках X и Y . Докажите, что $XY \perp BC$.

3. Дано множество S , изначально состоящее из нескольких приведенных многочленов, все корни которых вещественны и отрицательны. Множество S пополняется по следующему правилу: если $P(x) \in S$ и $Q(x) \in S$, то многочлены $P(x) + Q(x)$, $P(x) \cdot Q(x)$ и $P(Q(x))$ также включаются в S . Существует ли такое исходное множество S , в котором со временем появится многочлен, все корни которого вещественны и положительны?

4. Если ввести в программу натуральное число x , она возвращает значение $k(x^2 - 1)$, где k — наименьшее натуральное число, такое, что результат является полным квадратом. Сначала в программу ввели натуральное число $n > 1$, затем полученный результат снова подали на вход, и так далее. Программа отработала 10 раз. Может ли количество цифр в последнем числе быть в 1024 раза больше, чем в исходном числе n ?

II. Методический блок

5. Решение задачи несколькими способами.

Задание: Приведите три различных способа решения данной задачи.

Задача: Синусы четырех углов четырехугольника равны. Докажите, что у четырехугольника есть две равные стороны.

6. Координация.

Задание: Покажите, как, используя полученный этим учеником результат, закончить решение задачи. Укажите возможные ваши предложения с обоснованием по оценке стоимости продвижения ученика на координации (за полное решение задачи на олимпиаде давалось, как обычно, 7 баллов).

Задача: Число назовём *особым*, если оно представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел не менее чем 2026 различными способами. Докажите, что существует бесконечно много особых чисел.

Ниже приведено начало решения, предложенное учеником:

«Рассмотрим простые числа вида $4k + 1$. Из теоремы Ферма-Эйлера известно, что любое такое простое число представимо в виде суммы двух квадратов единственным способом. Возьмем n первых простых чисел $p_1, \dots, p_n \equiv 1 \pmod{4}$...»

7. Поиск ошибок.

Задание: Проверьте решение на наличие логических ошибок. Если решение неверно, укажите на все ошибки и приведите правильное решение.

Задача: Петя и Вася по очереди выставляют в клетки доски 1001×1001 фишки, начинает Петя. Проигрывает игрок, после хода которого найдётся горизонталь или вертикаль с 3 фишками. Кто выигрывает при правильной игре?

Предложенное решение: Для каждой строки и каждого столбца заведём счётчики, начальное значение которых равно 2. После того как фишка выставляется на пересечении строки i и столбца j , будем вычитать из счётчиков этой строки и этого столбца по единице. Игра закончится, как только какой-либо из счётчиков станет равным 0.

Будем считать, что поставить фишку на пересечение строки и столбца можно только в том случае, если их счётчики больше 0. За каждый ход сумма значений всех счётчиков уменьшается ровно на 2. При этом сумма счётчиков по строкам всегда будет равна сумме счётчиков по столбцам.

Изначально общая сумма всех счётчиков равна $1001 \cdot 2 \cdot 3$. Игроки могут делать ходы до тех пор, пока сумма остаётся больше 0. Следовательно, проигрывает первый игрок: после последнего хода второго игрока общая сумма станет равна $1001 \cdot 2$, а значит, следующим ходом первый игрок обязательно обнулит один из счётчиков.

Ответ: выигрывает Вася.

**VIII International open creative contest for teachers and trainers
of the Olympic reserve of Mathematics, Physics and Computer Science
ALMATY, 10-13 January 2026**

Mathematics. Trainer League

You are offered two blocks of tasks:

I. "Mathematical Block" (problems №1–№4 to be solved).

II. "Methodological Block" (problems №5–№7, includes tasks simulating the daily work of an Olympic reserve trainer).

Contest duration: 4 hours. Each task is evaluated at 10 points.

I. Mathematical Block

1. Let x, y, z be positive numbers such that $x + y + z = 3$. Prove the inequality:

$$\frac{x + y^2}{z + 1} + \frac{y + z^2}{x + 1} + \frac{z + x^2}{y + 1} \geq 3.$$

2. Given a rhombus $ABCD$. Let M and N be the midpoints of sides AB and CD , respectively. Point E is the foot of the perpendicular from point B to the line AN , and F is the foot of the perpendicular from point C to the line DM . The circumcircles of triangles ACF and BED intersect at points X and Y . Prove that $XY \perp BC$.

3. Let S be a set initially consisting of several monic polynomials, all of whose roots are real and negative. The set S is expanded according to the following rule: if $P(x) \in S$ and $Q(x) \in S$, then the polynomials $P(x) + Q(x)$, $P(x) \cdot Q(x)$, and $P(Q(x))$ are also included in S . Does there exist such an initial set S in which a polynomial with all real and positive roots will eventually appear?

4. If a natural number x is entered into a program, it returns the value $k(x^2 - 1)$, where k is the smallest natural number such that the result is a perfect square. First, a natural number $n > 1$ was entered into the program, then the obtained result was fed back as input, and so on. The program ran 10 times. Can the number of digits in the final number be 1024 times greater than the number of digits in the initial number n ?

II. Methodological Block

5. Solving the problem in different ways.

Task: Provide three different ways to solve the following problem.

Problem: The sines of the four angles of a quadrilateral are equal. Prove that the quadrilateral has at least two equal sides.

6. Coordination.

Task: Show how to complete the solution using the results obtained by this student. Provide your suggestions with justification for evaluating the student's progress during coordination (a full solution at the Olympiad is usually worth 7 points).

Problem: A number is called *special* if it can be represented as a sum of two squares of natural numbers in at least 2026 different ways. Prove that there are infinitely many special numbers.

Below is the beginning of a solution proposed by a student:

«Consider prime numbers of the form $4k + 1$. From the Fermat-Euler theorem, it is known that any such prime number can be represented as a sum of two squares in a unique way. Take the first n primes $p_1, \dots, p_n \equiv 1 \pmod{4}$...»

7. Mistakes Identification.

Task: Check the solution for logical errors. If the solution is incorrect, identify all errors and provide the correct solution.

Problem: Alice and Bob take turns placing chips in the cells of a 1001×1001 board; Alice starts. A player loses if, after their move, there is a horizontal or vertical line with 3 chips. Who wins with perfect play?

Proposed Solution: For each row and each column, we will set counters with an initial value of 2. After a chip is placed at the intersection of row i and column j , we will subtract one from the counters of that row and that column. The game ends as soon as any counter becomes 0.

Assume that a chip can be placed at the intersection of a row and a column only if their counters are greater than 0. For each move, the sum of all counters decreases by exactly 2. Moreover, the sum of row counters will always equal the sum of column counters.

Initially, the total sum of all counters is $1001 \cdot 2 \cdot 3$. Players can make moves as long as the sum remains greater than 0. Consequently, the first player loses: after the second player's last move, the total sum will become $1001 \cdot 2$, meaning that on the next move, the first player will necessarily zero out one of the counters.

Answer: Bob wins.