2ND INTERNATIONAL OLYMPIAD OF TEACHERS AND TRAINERS

Математика : IMPACT-2020

I Математикалық блок

1. Балықшы бірнеше балық аулады. Үш үлкен балықты (барлық ауланған балықтың салмағының 35%) тоңазытқышқа салды, үш кішкентай балықты (қалған балықтың $\frac{5}{13}$-і) мысығына берді, қалғанын өзі жеді. Балықшы неше балық аулады?
Жауабы: 10.
Шешуі: Тоңазытқышқа барлық балықтың $\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$-ін салды. Демек, $\frac{13}{20}$-і қалды. Мысығына $\frac{13}{20}$-тің $\frac{5}{13}$-ін, яғни $\frac{5}{20}$-ін берді. Сондықтан, балықшы барлық балықтың $\frac{8}{20}$-ін жеді. Бұл 3 балықтан көп, себебі 3 үлкен балық $\frac{7}{20}$ бөлігін құрайды. Бірақ, бұл 5 балықтан кем, себебі үш кіші балықтың орта салмағы барлық балықтың $\frac{5}{60}$, яғни 5 балық жалпы салмақтың $\frac{25}{60}$-нен кем. Бұл $\frac{8}{20}$-ден үлкен. Яғни, балықшы 4 балықты жеген. Онда барлық балық саны $3 + 3 + 4 = 10$.
Бағалау критерийі:
Толық шешім – **10 б.**
Шешу жолы дұрыс, бірақ есептеуде қате бар – **8 б.**
Тек қана дұрыс жауап жазылған (тексеру орындалды) – **1 б.**
Есеп шығарылмады немесе қате шығарылды – **0 б.**
Баллдар қосылмайды.

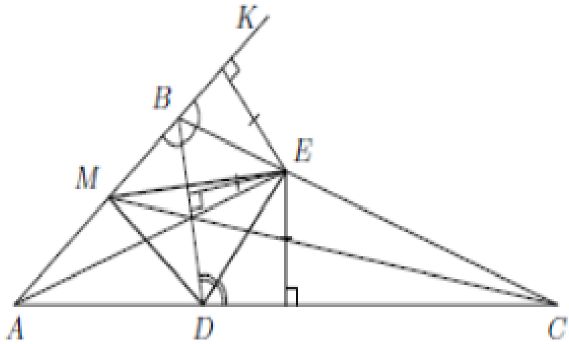
2. Егер x_1, x_2 $x^2 - 2ax + a + 6 = 0$ теңдеуінің нақты түбірлері болса, $x_1^2 + x_2^2$ өрнегінің ең кіші мәнін анықтаңыз.
Жауабы: 8.
Шешуі: $D \geq 0$ болғанда, теңдеудің нақты түбірлері болады.
$$D = (-2a)^2 - 4 \cdot (a + 6) = 4a^2 - 4a - 24 = 4(a + 2)(a - 3) \geq 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty).$$
Виет теоремасы бойынша:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a, \\ x_1 \cdot x_2 = a + 6. \end{cases}$$
$$S(a) = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 4a^2 - 2a - 12 = \left(2a - \frac{1}{2}\right)^2 - 12\frac{1}{4}.$$
$S_{min} = -12\frac{1}{4}$, егер $a = \frac{1}{4}$.
Бірақ, $\frac{1}{4} \notin (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$.
$S(3) = 18$ немесе $S(-2) = 8$. Яғни $a = -2$ болғанда, $S_{min} = 8$.
Бағалау критерийі:
Толық шешім – **10 б.**
Шешу жолы дұрыс, бірақ есептеуде қате бар – **8 б.**
Нақты түбірлерді ескермей, есепті шығарды – **3 б.**
Есеп шығарылмады немесе қате шығарылды – **0 б.**
Баллдар қосылмайды.

3. B бұрышы 120^0 болатын ABC үшбұрышының AE, BD және CM биссектрисалары O нүктесінде қиылысады. DMO бұрышын анықтаңыз.
Жауабы: 30^0
Шешуі: B нүктесінен AB қабырғасының созындысынан K нүктесін алайық.

$$\angle EBK = 180^0 - \angle ABC = 180^0 - 120^0 = 60^0 = \angle DBE$$

болғандықтан, BE – ABD бұрышымен сыбайлас, DBK бұрышың биссектрисасы. Сондықтан E нүктесі AB, BD және CD түзулерінен бірдей қашықтықта орналасқан. Осыдан, DE – BDC бұрышының биссектрисасы. Дәл сол сияқты, DM – ADB бұрышының биссектрисасы. Осыдан,

$$\angle MDE = \frac{1}{2}(\angle ADB + \angle BDC) = 90^0.$$

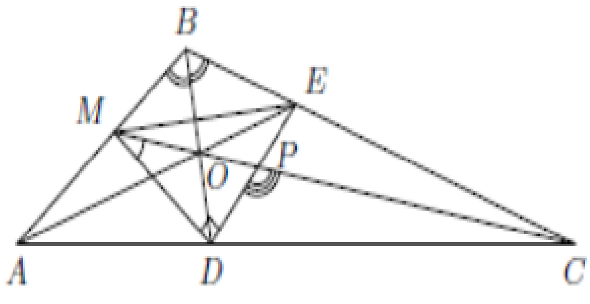


Егер P – DE және CM кесінділерінің қиылысу нүктесі болса, онда P – BDC үшбұрышының биссектрисаларының қиылысу нүктесі болады. Сондықтан

$$\angle DPC = 90^0 + \frac{1}{2}\angle DBC = 90^0 + 30^0 = 120^0,$$

$\angle DPC$ – MDP үшбұрышының сыртқы бұрышы болғандықтан,

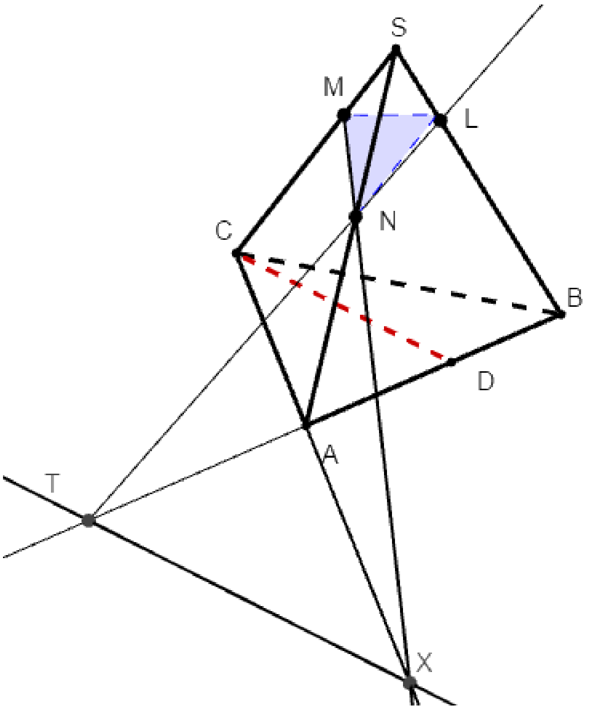
$$\angle DMO = \angle DPC - \angle MDP = 120^0 - 90^0 = 30^0.$$



Бағалау критерийі:
BE –DBK бұрышың биссектрисасы – **2 б.**
DE – BDC бұрышының биссектрисасы – **1 б.**
DM – ADB бұрышының биссектрисасы – **1 б.**
$\angle MDE = 90^0$ – **2 б.**
P – BDC үшбұрышының биссектрисасы – **2 б.**
$\angle DPC = 120^0$ – **1 б.**
$\angle DMO = 30^0$ – **1 б.**
Баллдар қосылады.

4. Теңдеуді шешіңіз: $x \cdot \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{1+x^2}$.
Жауабы: $1, 1+\sqrt{2}$.
Шешуі: $-1 \le x \le 3$. $\overrightarrow{a} = (x;1)$ және $\overrightarrow{b} = (\sqrt{1+x}; \sqrt{3-x})$. векторларын енгізейік.
Онда $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x \cdot \sqrt{1+x} + 1 \cdot \sqrt{3-x}, |\overrightarrow{a}| = \sqrt{x^2+1}, |\overrightarrow{b}| = \sqrt{1+x+3-x} = 2$.
$|\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}| \le |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| = \sqrt{x^2+1} \cdot 2$.
Теңдік векторлар коллинеар болғанда орындалады, яғни $\overrightarrow{a} = k \cdot \overrightarrow{b}.k = 1$.
Осыдан
$$x\sqrt{3-x} = \sqrt{1+x},$$
$$x^2(3-x) = 1+x, x \ge 0,$$
$$x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$$
$$(x-1)(x^2-2x-1) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 1+\sqrt{2}, \\ x = 1-\sqrt{2} \text{ (бөгде түбір).} \end{array}\right.$$
Бағалау критерийі:
Толық шешім – **10 б.**
Шешу жолы дұрыс, бірақ есептеуде қате бар – **8 б.**
Тек қана дұрыс жауап жазылған (тексеру орындалды) – **1 б.**
Есеп шығарылмады немесе қате шығарылды – **0 б.**
Баллдар қосылмайды.

5. $SABC$ пирамидасының SC бүйір қырынан $SM : MC = 2 : 5$ болатындай M нүктесі,ал SA қырынан $SN : NA = 3 : 2$ болатындай N нүктесі алынңан. MN түзуі арқылы ABC үшбұрышының CD медианасына параллель α жазықтығы жүргізілген. α пирамиданы екі бөлікке бөледі: төменгі және жоғарғы. Пирамиданың көлемі 280 болса, төменгі бөліктің көлемін табыңыз.
Жауабы: 271.
Шешуі:
$(ASC): \ MN \cap AC = X$
$(ABC): \ XT || CD, XT \cap AB = T$
$(ASB): \ TN \cap SB = L$
MNL – ізделінді қима.
ΔSAC : Менелай теоремасы бойынша
$$\frac{CM}{MS} \cdot \frac{SN}{NA} \cdot \frac{AX}{XC} = 1 \Rightarrow \frac{AX}{XC} = \frac{4}{15}$$
$(ACB) : CD||TX, \Delta CDA \sim \Delta XTA$
$$\frac{AC}{AX} = \frac{DA}{TA} = \frac{11}{4}$$
ΔSAB : Менелай теоремасы бойынша
$$\frac{SL}{LB} \cdot \frac{BT}{AT} \cdot \frac{AN}{NC} = 1 \Rightarrow \frac{SL}{LB} = \frac{3}{13}$$
$$\frac{V_{SMLN}}{V_{SABC}} = \frac{SM \cdot SN \cdot SL}{SC \cdot SA \cdot SB} = \frac{9}{280}$$
$$V_{ABCNLM} = 280 - 9 = 271.$$

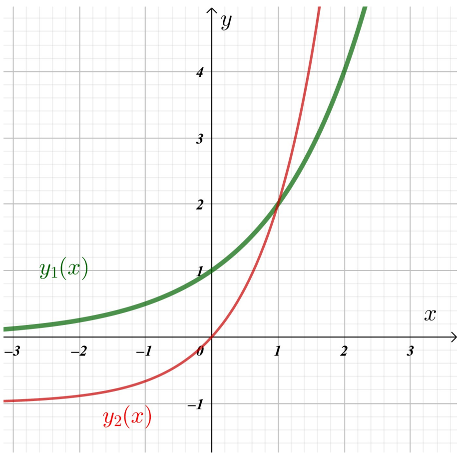


Бағалау критерийі:
Толық шешім – **10 б.**
Шешу жолы дұрыс, бірақ есептеуде қате бар – **8 б.**
Тек қана қима салынды – **2 б.**
Есеп шығарылмады немесе қате шығарылды – **0 б.**
Баллдар қосылмайды.

II Әдістемелік блок

№6 және №7 тапсырмаларында математикалық қателер («есеп» шартында, қалай да «жауаптарында» және «шешімдерінде») болуы мүмкін. Егер «есеп» шарты қисынсыз (некорректно) болса, онда неге сондай екенін түсіндіріңіз. Егер тек «шешуі» дұрыс болмаса, онда барлық қателерді көрсетіңіздер және дұрыс шешуін келтіріңіздер.

6. Теңдеуді шешіңіз $2^x = 3^x - 1$.
«Жауабы:» $x = 1$.
«Шешуі:» $y_1 = 2^x$ және $y_2 = 3^x - 1$ функциялардың графиктерін салайық.



Сызбадан графиктердің (1; 2) нүктеде қиылысатынын көруге болады. Осыдан теңдеудің шешуі $x = 1$.
Комментарий. Теңдеудің түбірі дұрыс анықталды, бірақ графиктік әдіс толық шешімі болып табылмайды. Теңдеудің екі жағы да монотонды өспелі болғандықтан, жалғыз түбірі болмауы мүмкін, сондықтан есеп толық шешілмеген. Дұрыс шешімін көрсетейік.
Теңдеудің $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$ түрінде жазайық. $y(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$ функциясының туындысы $y'(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \ln\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^x \ln\frac{1}{3}$. Яғни, кез келген x үшін $y' < 0$. Осыдан $y(x)$ функциясы барлық сандар осьінде кемімелі. $y(1) = 1$ байқауға болады, сондықтан теңдеудің жалғыз шешімі $x = 1$.
Бағалау критерийі:
Жауаптың дұрыс екені көрсетілді — **1 б.**
Есептің шешуінің қатесі анықталды — **4 б.**
Дұрыс шешім — **5 балла**
Баллдар қосылады.

7. Теңдікті дәлелдеңіз: $\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38} + \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38} = \sqrt{20}$.
«Дәлелдеуі:» Теңдіктің екі жағын да куб дәрежеге шығарып, ықшамдасақ:

$$34\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38} \cdot \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38} \cdot \left(\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38} + \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}\right) = 20\sqrt{20}.$$

Жақшаның ішіндегі өрнектің орнына $\sqrt{20}$ қойсақ, онда

$$34\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{1445-1444} \cdot \sqrt{20} = 20\sqrt{20} \Leftrightarrow 34\sqrt{5} = 17\sqrt{20} \Leftrightarrow 34\sqrt{5} = 34\sqrt{5}.$$

Дұрыс тұжырым алдық, яғни теңдік дұрыс.
Комментарий. «Шешуінде» логикалық қате бар. Есепті шешу барысында дәлелдеу керек тұжырым ақиқат ретінде қолданылды, бұл қате . Дұрыс дәлелдеудің екі тәсілін көрсетейік.
1-тәсіл. $\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38} + \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38} = x$ деп алайық және теңдіктің екі жағын да кубтайық. Өрнекті ықшамдап, x-тің

$$x^3 - 3x - 17\sqrt{20} = 0$$

теңдеудің түбірін қанағантандыратын байқаймыз. Теңдеуді бірден шешу оңай емес. Бірақ, есеп шарты бойынша $x = \sqrt{20}$ теңдеудің түбірі болуы мүмкін. Шыныменде, $x = \sqrt{20}$ болғанда, кубтық өрнек 0-ге тең. Яғни теңдеуді келесі түрде жазуға болады:

$$x^3 - 3x - 17\sqrt{20} = \left(x - \sqrt{20}\right)\left(x^2 + \sqrt{20}x + 17\right)$$

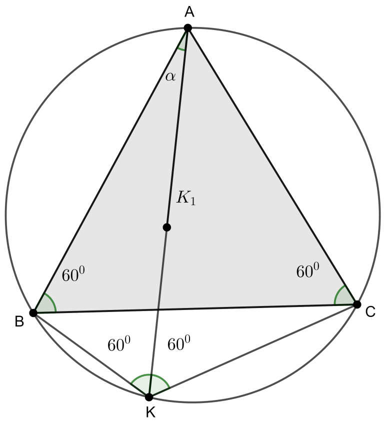
(екінші жақшаны $x^3 - 3x - 17\sqrt{20}$ көпмүшесін $x - \sqrt{20}$ көпмүшеге «бұрыштап» бөлу арқылы табуға болады). $x^2 + \sqrt{20}x + 17$ квадраттық үшмүшесінің дискриминаты теріс сан, яғни квадраттық үшмүшенің нақты түбірі жоқ. $x = \sqrt{20}$ кубтық теңдеудің жалғыз шешімі. Теңдік дәлелденді.
2-әдіс. $a = \sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}; b = \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}$ белгілеу арқылы, $a > 0, b > 0, ab = 1$ байқауға болады.

$$a^2 = \sqrt[3]{\left(17\sqrt{5}+38\right)^2} = \sqrt[3]{\left(9+4\sqrt{5}\right)^3} = 9 + 4\sqrt{5},$$

$$b^2 = \sqrt[3]{\left(17\sqrt{5}-38\right)^2} = \sqrt[3]{\left(9-4\sqrt{5}\right)^3} = 9 - 4\sqrt{5},$$

Осыдан, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 20$. $a + b > 0$, шартын қолданып,$(a+b)^2 = 20$ екі жақтанда түбір алсақ, $a + b = \sqrt{20}$. Теңдік дәлелденді.
Бағалау критерийі:
Есептің шешуінің қатесі анықталды — **4 б.**
Дұрыс шешім — **6 балла**
Баллдар қосылады.

8. Теңқабырғалы ABC үшбұрышы шеңберге іштей сызылған. K нүктесі BC доғасында жатыр. $AK = BK + CK$ болатынын дәлелдеңіз. Әртүрлі үштен кем емес дәлелдеуін келтіріңіз.
Шешім 1 (Косинустар теоремасы).



$\angle AKB = \angle ACB = \angle AKC = \angle BAC = 60^0$

$$AB^2 = BK^2 + AK^2 - 2 \cdot AK \cdot AK \cdot \cos 60^0$$

$$AC^2 = KC^2 + AK^2 - 2 \cdot KC \cdot AK \cdot \cos 60^0$$

$$AK^2 - KC^2 - AK \cdot BK + KC \cdot AK$$

$$(BK - KC)(BK + KC) = AK(BK - KC)$$

$$AK = BK + KC$$

Шешім 2 (Птоломей теоремасы). Птоломей теоремасы бойынша

$$BC \cdot AK = AB \cdot CK + AC \cdot KB.$$

$BC = AC = AB$ болғандықтан,

$$AK = KC + KB$$

Шешім 3 (Тригонометрия). $\angle BAK = \alpha$ болсын. Онда $\angle ABK = 120^0 - \alpha$, $\angle KAC = 60^0 - \alpha$, $\angle ACK = 60^0 + \alpha$. Синустар теоремасы бойынша:

$$\frac{BK}{\sin \alpha} = \frac{AK}{\sin(120^0 - \alpha)}$$

$$\frac{CK}{\sin(60^0 - \alpha)} = \frac{AK}{\sin(60^0 + \alpha)}$$

$$BK = \frac{AK \sin \alpha}{\sin(120^0 - \alpha)}, CK = \frac{AK \sin(60^0 - \alpha)}{\sin(60^0 + \alpha)}$$

$$BK + CK = AK\left(\frac{\sin \alpha}{\sin(120^0 - \alpha)} + \frac{\sin(60^0 - \alpha)}{\sin(60^0 + \alpha)}\right)$$

$$BK + CK = AK\left(\frac{\sin \alpha}{\sin(60^0 + \alpha)} + \frac{\sin(60^0 - \alpha)}{\sin(60^0 + \alpha)}\right)$$

$$BK + CK = AK\left(\frac{\sin \alpha + \sin(60^0 - \alpha)}{\sin(60^0 + \alpha)}\right)$$

$$BK + CK = AK\left(\frac{2 \sin 30^0 \cdot \cos(\alpha - 30^0)}{\sin(60^0 + \alpha)}\right)$$

$$BK + CK = AK\left(\frac{\cos(\alpha - 30^0)}{\cos(\alpha - 30^0)}\right)$$

$$BK + CK = AK$$

Шешім 4 (Координаталар әдісі). $A\left(0;R\right), AC = 3\sqrt{R}$,

$$B\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2};-\frac{R}{2}\right), C\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};-\frac{R}{2}\right), K\left(-R\sin 2\alpha;-R\cos 2\alpha\right).$$

$$BK^2 = R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin 2\alpha\right)^2 + R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos 2\alpha\right)^2 = R^2\left(2-\sqrt{3}\sin 2\alpha-\cos 2\alpha\right)$$

$$CK^2 = R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin 2\alpha\right)^2 + R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos 2\alpha\right)^2 = R^2\left(2+\sqrt{3}\sin 2\alpha-\cos 2\alpha\right)$$

$$AK^2 = R^2\sin^2 2\alpha + R^2\left(1+\cos\alpha\right)^2 = R^2\left(2+2\cos 2\alpha\right)$$

$$\left(BK+KC\right)^2 = R^2\left(4-2\cos 2\alpha\right)+2R^2\sqrt{4-4\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha-3\sin^2 2\alpha} =$$

$$= R^2\left(4-2\cos 2\alpha\right)+2R^2\sqrt{4\cos^2 2\alpha-4\cos 2\alpha+1} = R^2\left(4-2\cos 2\alpha+2\left(2\cos 2\alpha-1\right)\right) =$$

$$= R^2\left(2+2\cos 2\alpha\right) = AK^2$$

$$AK = KB + KC$$

Шешім 5 (Қосымша салу). AK сәулесінен CK-ға тең AK_1 кесіндісін алайық. Онда AK_1B және CKB үшбұрыштары екінші белгі бойынша тең. BKK_1 үшбұрышында $BK_1 = BK, \angle BKK_1 = \angle BKA = \angle BCA = 60^0$. Сондықтан, $KK_1 = BK$. Осыдан $AK = AK_+K_1K = BK + CK$.
Шешім 6 (Бұру) BKC үшбұрышын B нүктесі бойынша сағат тіліне қарсы 60^0-қа бұрайық. Онда $C \to A, K \to K_1$. $\angle AK_1B = 120^0$. BKK_1 үшбұрышында $\angle K_1BK = 60^0, BK = BK_1$. Онда BKK_1 – теңқабырғалы ұшбұрыш. Осыдан $BK_1K = 60^0$. Яғни A, K_1, K нүктелері бір түзу бойынша жатыр, $K_1 \in AK$. Онда $AK_1 = KC, KK_1 = BK \Rightarrow AK = BK + KC$.
Бағалау критерийі:
Бір дәлелдеу – **3 балла**
Екі дәлелдеу – **6 баллов**
Үш дәлелдеу – **10 баллов**
Баллдар қосылмайды.