МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА ЖӘНЕ ИНФОРМАТИКА ПӘНДЕРІ БОЙЫНША МҰҒАЛІМДЕР МЕН ОЛИМПИАДАЛЫҚ РЕЗЕРВ ЖАТТЫҚТЫРУШЫЛАРЫНЫҢ IV ХАЛЫҚАРАЛЫҚ АШЫҚ ШЫҒАРМАШЫЛЫҚ БАЙҚАУЫ - IMPACT OLYMPIAD

Уақыты: 4 сағат 30 минут
Әр есеп 10 баллдан бағаланады.

I Математикалық блок

1. $a_1, a_2, \ldots -$тізбегі келесі жолмен анықталады: $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 3} + 1$ a_{2022}-ні табыңыз.

2. $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}$ (квадраттық түбір *n* рет қайталанады).

$$\frac{2 - x_n}{2 - x_{n-1}} > \frac{1}{4}$$

орындалатынын дәлелдеңіз.

3. Теңдеулер жүйесін шешіңіз:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+16} + \sqrt{z^2+25} = 37 \\ x + y + z = 35 \\ x \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad z \geq 0. \end{cases}$$

4. Шеңберге іштей сызылған төртбұрыштың қабырғаларының созындылары P және Q нүктелерінде қиылысады, ал осы нүктелерден төртбұрышқа сырттай сызылған шеңберге жүргізілген жанамалардың ұзындықтары m және n −ге тең. PQ кесіндісінің ұзындығын табыңыз.

ІІ Әдістемелік блок

№5-№7 тапсырмаларында математикалық қателер («есеп» шартында, қалай да «жауаптарында» және «шешімдерінде») болуы мүмкін. Егер «есеп» шарты қисынсыз (некорректно) болса, онда неге сондай екенін түсіндіріңіз. Егер тек «шешуі» дұрыс болмаса, онда себебін түсіндіріп барлық қателерді көрсетіңіздер, және дұрыс шешуін келтіріңіздер.

5. Шекті есептеңіз: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{x^2}\right)$

«Шешуі».

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{ctg}^2 x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\operatorname{ctg}^2 x + x^2\cdot\dfrac{2\operatorname{ctg} x}{-\sin^2 x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - x\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - \dfrac{x\cos x}{\sin x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\left(\cos x - \dfrac{x}{\sin x}\right)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x(\cos x - 1)}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x 2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

«Жауабы»: $-\frac{1}{2}$.

6. Егер $\cos x - \cos y = \frac{1}{2}$, $\sin x - \sin y = -\frac{1}{3}$, болса, онда $\sin(x+y)$ -тің мәнін табыңыз.

«Шешуі»:

$\cos x - \cos y = \frac{1}{2}$ (1), $\sin x - \sin y = -\frac{1}{3}$, (2) болсын.

Өрнек (1) мен (2) -нің екі жағын өзара квадраттап қосып, ықшамдағанда

$\cos^2 x - 2\cos x\cos y + \cos^2 y + \sin^2 x - 2\sin x\sin y + \sin^2 y = \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$,

$-2\cos(x-y) = -\frac{59}{36}$, $\quad \cos(x-y) = \frac{59}{72} \qquad (3)$

Өрнек (1) мен (2) -нің екі жағын өзара квадраттап, азайтып ықшамдағанда

$\cos^2 x - 2\cos x\cos y + \cos^2 y - \sin^2 x + 2\sin x\sin y - \sin^2 y = \frac{1}{4} - \frac{1}{9}$,

$$\cos 2x + \cos 2y - 2\cos(x+y) = \frac{5}{36},$$

$$2\cos(x+y)\cos(x-y) - 2\cos(x+y) = \frac{5}{36},$$

$$\cos(x+y)[\cos(x-y) - 1] = \frac{5}{72} \qquad (4),$$

(3) -ті, (4) -тегі орнына қойып, ықшамдасақ,

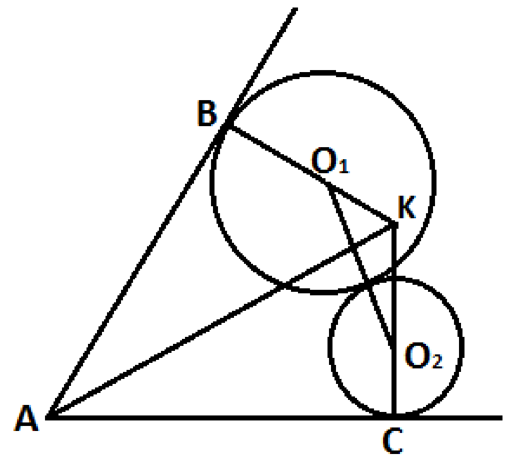
$\cos(x+y)\left[\frac{59}{72} - 1\right] = \frac{5}{72}$. Бұдан $\cos(x+y) = -\frac{5}{13}$ шығады.

Сонымен $\sin(x+y) = \pm\sqrt{1-\cos^2(x+y)} = \pm\frac{12}{13}$.

«Жауабы»: $\boldsymbol{\sin(x+y) = \pm\frac{12}{13}}$.

7. BAC бұрышы 60°-қа тең және $AB = AC = a$. Центрі O_1 болатын шеңбер AB-ны B нүктесінде, ал центрі O_2 болатын шеңбер AC-ны C нүктесінде жанайды және де шеңберлер бір-бірімен сырттай жанасады. Шеңберлердің радиустарының қатынасы 2-ге тең болса, оларды табыңыз.

«Шешуі».



$O_1B \perp AB$ және $O_2C \perp AC$ екені белгілі. K–O_1B және O_2C түзулерінің қиылысу нүктесі болсын.

$\angle BKC = 120°$. $AB = AC$ болғандықтан,

$\triangle BAK = \triangle CAK$.

Онда $\angle BAK = \angle CAK = 30°$.

$BK = CK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$O_2C = r$. $O_1B = 2r$ болсын, онда $O_1K = \frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r$,

$O_2K = \frac{a\sqrt{3}}{3} - r$.

$\triangle O_1KO_2$ үшбұрышына косинустар теоремасын қолданып, есептейміз:

$$9r^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)cos120°$$

$$9r^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)$$

$$9r^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{4a\sqrt{3}}{3}r + 4r^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{2a\sqrt{3}}{3}r + r^2 - \frac{a^2}{3} + \frac{3a\sqrt{3}}{3}r - 2r^2$$

$6r^2 + \sqrt{3}rx - \frac{a^2}{3} = 0.$ $r = \frac{-\sqrt{3}a \pm a\sqrt{11}}{12}.$ $r > 0$ болғандықтан

$r = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{12}a$, $2r = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{6}a.$

«Жауабы»: $\boldsymbol{O_2C = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{12}a}$ **,** $\boldsymbol{O_1B = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{6}a.}$

IV МЕЖДУНАРОДНЫЙ ОТКРЫТЫЙ ТВОРЧЕСКИЙ КОНКУРС УЧИТЕЛЕЙ И ТРЕНЕРОВ ОЛИМПИЙСКОГО РЕЗЕРВА МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ И ИНФОРМАТИКИ – IMPACT OLYMPIAD

Время: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 10 баллов

I Математический блок

1. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ —последовательность, определяемая следующим образом: $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 3} + 1$. Найдите a_{2022}.

2. Пусть $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}$ (квадратный корень повторяется n раз). Докажите, что

$$\frac{2 - x_n}{2 - x_{n-1}} > \frac{1}{4}.$$

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{y^2 + 16} + \sqrt{z^2 + 25} = 37 \\ x + y + z = 35 \\ x \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad z \geq 0. \end{cases}$$

4. Противоположные стороны вписанного четырехугольника пересекаются в точках P и Q, а длины касательных к описанной окружности из этих точек равны m и n. Найдите длину отрезка PQ.

II Методический блок

В заданиях № 5-7 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки с объяснениями и приведите верное решение.

5. Вычислите предел: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{x^2}\right)$

«Решение».

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{ctg}^2 x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\operatorname{ctg}^2 x + x^2\cdot\dfrac{2\operatorname{ctg} x}{-\sin^2 x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - x\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - \dfrac{x\cos x}{\sin x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\left(\cos x - \dfrac{x}{\sin x}\right)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x(\cos x - 1)}{\sin^2 x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x 2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4\sin^2\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

«Ответ»: $-\frac{1}{2}$.

6. Найдите значение $\sin(x+y)$, если $\cos x - \cos y = \frac{1}{2}$, $\sin x - \sin y = -\frac{1}{3}$.

«Решение»: Обозначим

$$\cos x - \cos y = \frac{1}{2} \qquad (1)$$
$$\sin x - \sin y = -\frac{1}{3} \qquad (2)$$

Возводим обе части уравнений в квадрат и сложим:

$\cos^2 x - 2\cos x\cos y + \cos^2 y + \sin^2 x - 2\sin x\sin y + \sin^2 y = \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$,

$-2\cos(x-y) = -\frac{59}{36}$, $\quad \cos(x-y) = \frac{59}{72} \qquad (3)$

Возводим обе части уравнений в квадрат и вычтем:

$\cos^2 x - 2\cos x\cos y + \cos^2 y - \sin^2 x + 2\sin x\sin y - \sin^2 y = \frac{1}{4} - \frac{1}{9}$,

$$\cos 2x + \cos 2y - 2\cos(x+y) = \frac{5}{36},$$
$$2\cos(x+y)\cos(x-y) - 2\cos(x+y) = \frac{5}{36},$$
$$\cos(x+y)[\cos(x-y) - 1] = \frac{5}{72} \qquad (4),$$

Подставив в (4) значение $\cos(x-y)$, получим:

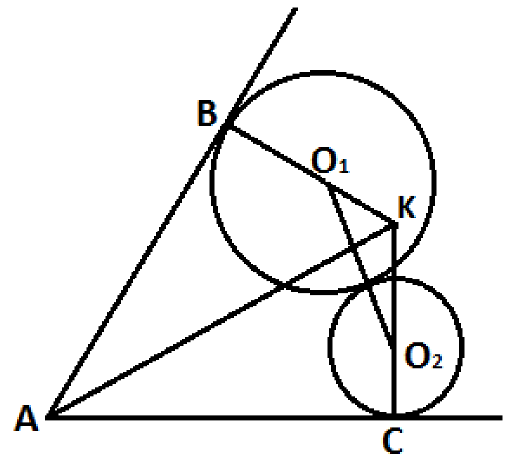
$$\cos(x+y)\left[\frac{59}{72} - 1\right] = \frac{5}{72} \text{ или } \cos(x+y) = -\frac{5}{13}.$$

Тогда $\sin(x+y) = \pm\sqrt{1-\cos^2(x+y)} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \pm\frac{12}{13}$

«Ответ»: $\mathbf{\sin(x+y) = \pm\frac{12}{13}}$.

7. Угол BAC равен $60°$, причем $AB = AC = a$. Окружность O_1 касается AB в точке B, а окружность O_2 касается AC в точке C, кроме того, эти окружности касаются друг друга внешним образом. Найдите радиусы окружностей, если известно, что их отношение равно двум.

«Решение».



Мы знаем, что $O_1B \perp AB$ и $O_2C \perp AC$. K–точка пересечения прямых O_1B и O_2C. $\angle BKC = 120°$. Так как $AB = AC$, то $\triangle BAK = \triangle CAK$.

Отсюда $\angle BAK = \angle CAK = 30°$.

Тогда $BK = CK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Пусть $O_2C = r$. $O_1B = 2r$.

Тогда $O_1K = \frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r$,

$O_2K = \frac{a\sqrt{3}}{3} - r$. Применим к $\triangle O_1KO_2$ теорему косинусов. Имеем:

$$9r^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)cos120°$$

$$9r^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)$$

$$9r^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{4a\sqrt{3}}{3}r + 4r^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{2a\sqrt{3}}{3}r + r^2 - \frac{a^2}{3} + \frac{3a\sqrt{3}}{3}r - 2r^2$$

$6r^2 + \sqrt{3}rx - \frac{a^2}{3} = 0.$ $r = \frac{-\sqrt{3}a \pm a\sqrt{11}}{12}$. Так как $r > 0$, то

$r = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{12}a$, $2r = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{6}a.$

«Ответ»: $\boldsymbol{O_2C = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{12}a}$ **,** $\boldsymbol{O_1B = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{6}a.}$

IV INTERNATIONAL OPEN CREATIVE CONTEST FOR TEACHERS AND TRAINERS OF THE OLYMPIC RESERVE OF MATHEMATICS, PHYSICS AND INFORMATICS - IMPACT OLYMPIAD

Duration: 4 hours 30 minutes
Each task is worth 10 points

I Math block

1. Let the sequence $a_1, a_2, \ldots$ be defined as follows:
$a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 3} + 1$. Find a_{2022}.

2. Let $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}$ (the square root is repeated n times). Prove that

$$\frac{2 - x_n}{2 - x_{n-1}} > \frac{1}{4}.$$

3. Solve the system of equations:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+16} + \sqrt{z^2+25} = 37 \\ x + y + z = 35 \\ x \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad z \geq 0. \end{cases}$$

4. The opposite sides of the inscribed quadrilateral intersect at points P and Q, and the lengths of the tangents to the circumscribed circle from these points are equal to m and n. Find the length of segment PQ.

II Methodical block

Tasks № 5-7 may contain mathematical errors (both in the conditions of "problems", and in "answers" and "solutions"). If the condition of the "task" is incorrect, then explain why this is so. If only the "solution" is incorrect, then indicate all the errors with explanations and give the correct solution.

5. Calculate: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{x^2}\right)$

«Solution».

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{ctg}^2 x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\operatorname{ctg}^2 x + x^2\cdot\dfrac{2\operatorname{ctg} x}{-\sin^2 x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - x\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - \dfrac{x\cos x}{\sin x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\left(\cos x - \dfrac{x}{\sin x}\right)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x(\cos x - 1)}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x\, 2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

«Answer»: $-\frac{1}{2}$.

6. Find the value of $\sin(x+y)$, if $\cos x - \cos y = \frac{1}{2}$, $\sin x - \sin y = -\frac{1}{3}$.

«Solution»: Denote

$$\cos x - \cos y = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

$$\sin x - \sin y = -\frac{1}{3} \qquad (2)$$

We square both sides of the equations (1) and (2) and add them:

$$\cos^2 x - 2\cos x\cos y + \cos^2 y + \sin^2 x - 2\sin x\sin y + \sin^2 y = \frac{1}{4} + \frac{1}{9},$$

$$-2\cos(x-y) = -\frac{59}{36}, \quad \cos(x-y) = \frac{59}{72} \qquad (3)$$

We square both sides of the equations (1) and (2) and subtract the second from the first:

$$\cos^2 x - 2\cos x\cos y + \cos^2 y - \sin^2 x + 2\sin x\sin y - \sin^2 y = \frac{1}{4} - \frac{1}{9},$$

$$\cos 2x + \cos 2y - 2\cos(x+y) = \frac{5}{36},$$

$$2\cos(x+y)\cos(x-y) - 2\cos(x+y) = \frac{5}{36},$$

$$\cos(x+y)[\cos(x-y) - 1] = \frac{5}{72} \qquad (4),$$

Substituting the value $\cos(x-y)$ into equation (4), we get:

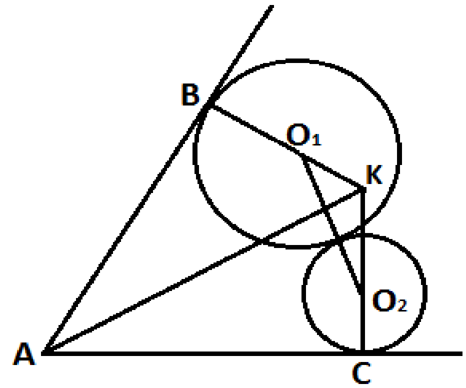
$$\cos(x+y)\left[\frac{59}{72} - 1\right] = \frac{5}{72} \text{ or } \cos(x+y) = -\frac{5}{13}.$$

Then $\sin(x+y) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(x+y)} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \pm\frac{12}{13}$

«Answer»: $\sin(x+y) = \pm\frac{12}{13}$.

7. Angle BAC is $60°$, with $AB = AC = a$. Circle centered at O_1 is tangent to AB at point B, and circle centered at O_2 is tangent to AC at point C, and these circles are externally tangent. Find the radii of the circles if their ratio is two.

«Solution».



We know that $O_1B \perp AB$ and $O_2C \perp AC$. K is the point of intersection of the lines O_1B and O_2C. $\angle BKC = 120°$. Since $AB = AC$, then $\triangle BAK = \triangle CAK$.

Hence $\angle BAK = \angle CAK = 30°$. Then $BK = CK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Let $O_2C = r$ and $O_1B = 2r$.

Then $O_1K = \frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r$, $O_2K = \frac{a\sqrt{3}}{3} - r$.

Let us apply the cosine theorem to $\triangle O_1KO_2$. We have:

$$9r^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)cos120°$$

$$9r^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - 2r\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - r\right)$$

$$9r^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{4a\sqrt{3}}{3}r + 4r^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{2a\sqrt{3}}{3}r + r^2 - \frac{a^2}{3} + \frac{3a\sqrt{3}}{3}r - 2r^2$$

$$6r^2 + \sqrt{3}rx - \frac{a^2}{3} = 0, r = \frac{-\sqrt{3}a \pm a\sqrt{11}}{12}.$$

Since $r > 0$, then $r = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{12}a$, $2r = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{6}a.$

«Answer»: $\boldsymbol{O_2C = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{12}a, \; O_1B = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{6}a.}$