



4th International creative competition of teachers and coaches of the
Olympic reserve in mathematics, physics and informatics

Математика, физика және информатика пәндері бойынша
мұғалімдер мен олимпиадалық резерв жаттықтырушыларының IV
халықаралық ашық шығармашылық байқауы

1st Problem (9 points)

A cycloid is a curve described by a point on the rim of a wheel that rolls uniformly and without slipping.

1.1. Write the equation for the cycloid in parametric form: $x(\varphi)$, $y(\varphi)$.

Radius of the wheel – R , rotation angle of the wheel – φ . Initial position of the point:
 $x(0)=0$, $y(0)=0$ for $\varphi=0$.

A small puck slides without friction along the inclined channel, which has the shape of a concave cycloid (see Figure-1). Initial speed and coordinates of the puck are $v_0=0$ and (x_0, y_0) .

1.2. Find the time it takes for the puck to slip to the bottom of the path.

1.3. Find the period of the oscillation of the puck along the path.

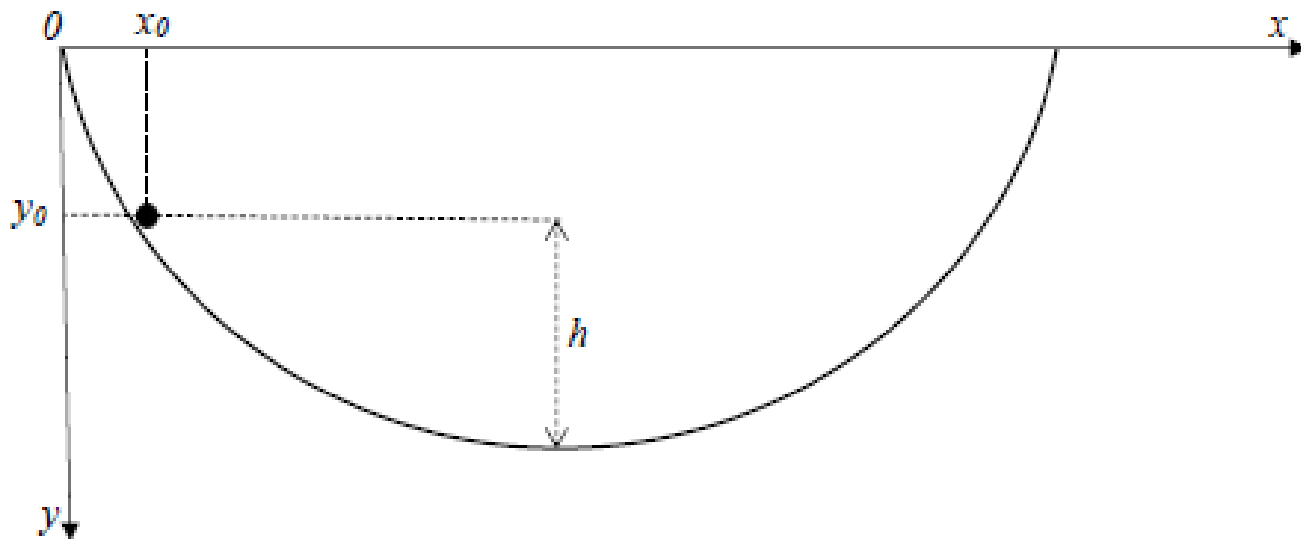


Figure-1

2nd Problem (13 points)

2.1. The chain of mass m and length L hangs motionless as the lower end is just touching to the table surface (see Figure-2). The chain is released. Find the force acting on the surface by the chain as a function of time and average force for the whole time interval of fall.

2.2. The chain was attached to the ceiling so that the chain sags under the ceiling for a distance equal to $L/(2\sqrt{3})$ (see figure-3)
Find the tension in the chain at point A, which is at a distance $L/3$ from one end.



Figure-2

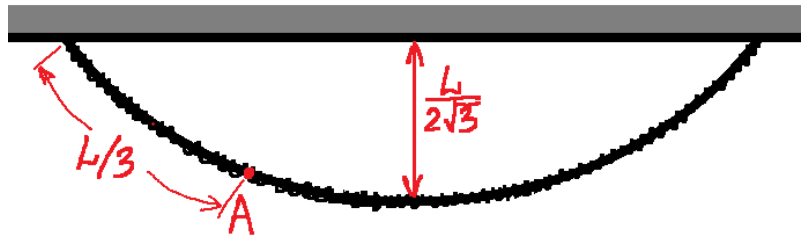


Figure-3

3rd Problem (18 points)

3.1. A closed vertical cylinder is divided into two parts by an easily movable piston. In the lower part there is 1 mole of air and in the upper part 2 moles of air, which can be considered an ideal gas. In equilibrium condition, when the temperature $T_0 = 320 \text{ K}$, the volume of the upper part of the cylinder is $k_1 = 5$ times the volume of the lower part. At what temperature will the ratio of these volumes become $k_2 = 4$?

3.2. A horizontal heat-insulated closed cylinder is divided into two parts by an easily movable piston with radius $r = 10 \text{ cm}$ and mass $m = 0,5 \text{ kg}$. The total volume of the cylinder is $V_0 = 15 \text{ lt}$. and it is filled with diatomic ideal gas under $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$, as on the left side, the amount of gas is twice as much as on the right side $\nu_1 = 2\nu_2$. Find the frequency of small oscillations of the piston when it is slightly displaced from the equilibrium position.

3.3. A closed, heat-insulated cylinder is filled with an ideal gas and divided by an easily movable piston. At equilibrium, the piston divides the cylinder into two parts, in the left part the amount of gas is twice as large as in the right $\nu_1 = 2\nu_2$, where the gas temperature is T_0 . The piston is slowly moved and the temperature of the gas changes. Find the gas temperature as a function of n , $T(n)$, where $n = V_1/V_2$ is the ratio of the volume of the part at the left to the that of at the right. The adiabatic index of the gas is given as γ .

4th Problem (18 points)

4.1. An uncharged conducting sphere is placed into a uniform electric field with strength E_0 . Find the dependence of the surface density of the induced charge σ with respect to angle α (see figure-4). At what points on the surface of the sphere, the magnitude of the field strength will be unchanged?

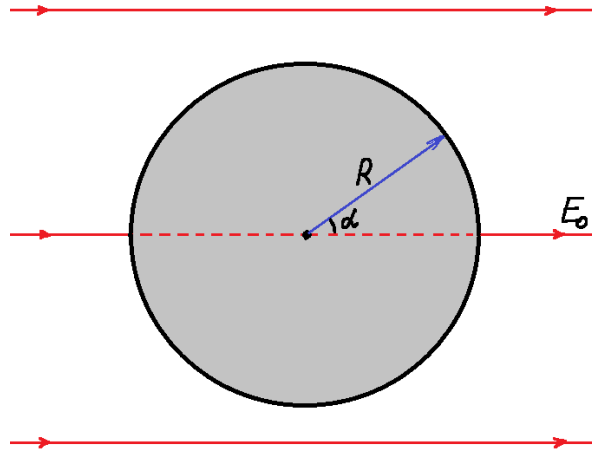


Figure-4

4.2. Two identical uncharged conducting spheres of radius R each are placed in a uniform electric field with strength E_0 so that the centers of the spheres are located at a distance ℓ from each other, where $\ell \gg R$. The line connecting the centers of the spheres is directed along the vector E_0 . Calculate the magnitude and direction of the force of electrical interaction between the spheres.

4.3. Solve the previous problem (4.2), for the condition when the line connecting the centers of the spheres is perpendicular to the vector E_0 .

5th Problem (18 points)

5.1. A rectangular frame with sides c and b is located at a distance d from a straight long wire carrying current I (see figure-5). The frame is started to shift progressively to the right with constant acceleration a and without initial speed. Neglecting the inductance of the frame, find the maximum value of the emf induced through it.

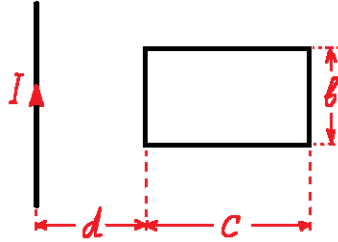


Figure-5

5.2. A rectangular frame with sides c and b is located at a distance d from a straight long wire carrying current I . What impulse P will the frame receive when the current I is turned off, if the active resistance of the frame is R , and the reactive resistance can be neglected?

5.3. A rectangular frame with sides c and b of a thin wire lies in the same plane with a straight long conductor at a distance d from the conductor. The active resistance and inductance of the loop are equal to R and L . During the time interval $t = L/R$, the current in the direct conductor increases uniformly from zero to I . How much heat Q will be released during this period of time in the loop?

6th Problem (18 points)

6.1. For any optical system which the formula $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ is valid, the distances to the source and image (d and f) are measured from the so-called cardinal planes of the system (for a thin lens, both of them coincide with the main plane). For a system of two thin lenses with focal lengths F_1 and F_2 , separated by a distance ℓ (see figure-6), determine the position of the cardinal planes and the focal length F of the system.

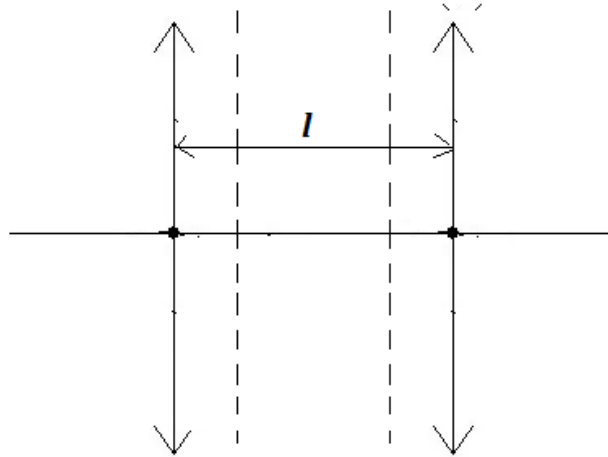


Figure-6

6.2. Determine the position of the cardinal planes and the focal length F for a thick converging lens, thickness $h=1\text{ cm}$, with surface curvature radii $R_1=30\text{ cm}$ and $R_2=40\text{ cm}$, made of a material with a refractive index $n=1,3$.



4th International creative competition of teachers and coaches of the Olympic reserve in mathematics, physics and informatics

Математика, физика және информатика пәндері бойынша мұғалімдер мен олимпиадалық резерв жаттықтырушыларының IV халықаралық ашық шығармашылық байқауы

1-тапсырма (9 ұпай)

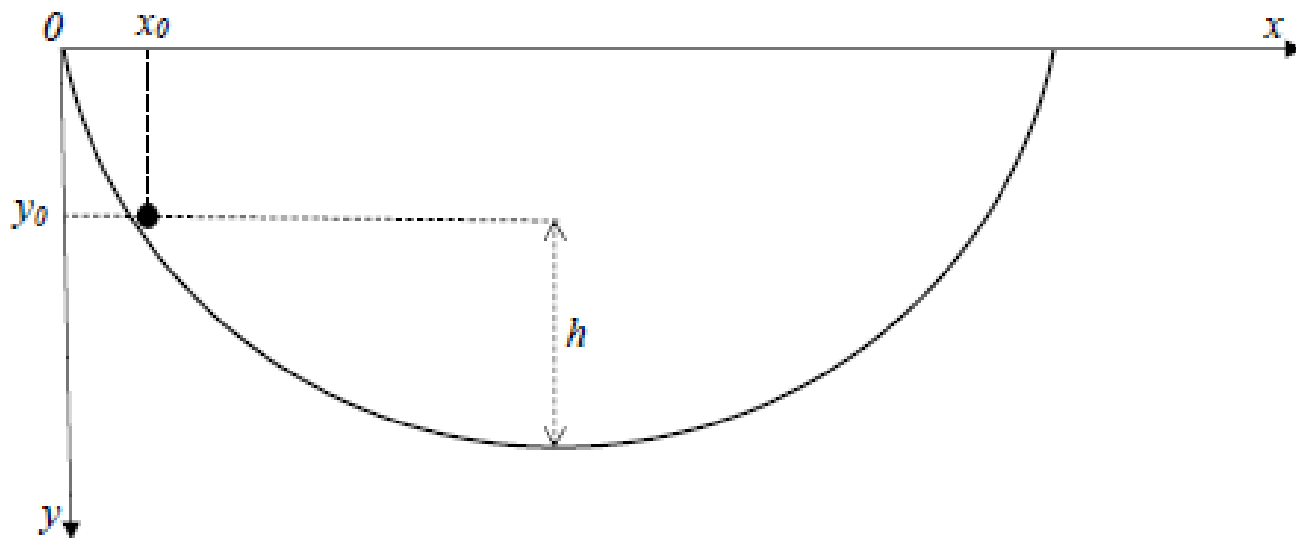
Циклоид – бірқалыпты және сырғанаусыз дөңгелеген дөңгелектің шеткі нүктесі сызатын қисық сызық.

1.1. Циклоидтық теңдеуінің параметрлік түрін жазыңыз: $x(\varphi)$, $y(\varphi)$. Дөңгелектің радиусы - R , дөңгелектің бұрылу бұрышы - φ . Нүктенің бастапқы орны: $\varphi=0$ үшін $x(0)=0$, $y(0)=0$.

Циклоид пішінді науа бойымен үйкеліссіз кішкене шайба сырғанайды (1-суретті қараңыз). Шайбаның бастапқы жылдамдығы $v_0=0$, бастапқы координатасы (x_0, y_0) .

1.2. Шайбаның ең төменгі нүктеге дейін сырғып түсуіне кететін уақытын табыңыз.

1.3. Шайбаның науа бойымен тербелуінің периодын табыңыз.



1-сурет

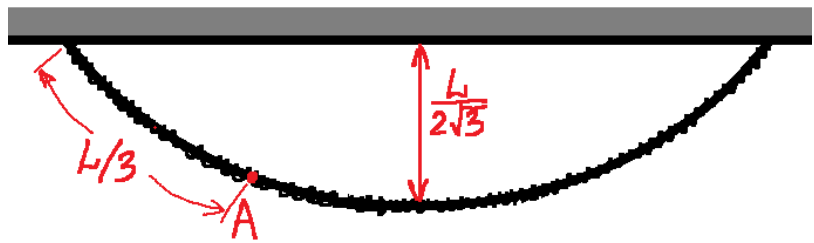
2- тапсырма (13 ұпай)

2.1. Массасы m , ұзындығы L шынжыр төменгі ұшымен үстел бетіне тиіп, қозғалыссыз ілулі тұр (2-сурет). Шынжыр босатылады. Құлау барысындағы шынжырдың үстелге түсіретін қысым күшінің уақытқа тәуелділігін және жалпы құлау кезіндегі қысым күшінің орташа мәнін анықтаңыз.

2.2. Шынжырды екі ұшынан төбеге ілгенде, салбыраған бөлігінің ең төменгі нүктесі төбеден $L/(2\sqrt{3})$ қашықтықта болған (3-сурет). Бір шетінен $L/3$ қашықтықта орналасқан А нүктесіндегі шынжырдың керілу күшін анықтаңыз.



2-сурет



3-сурет

3-тапсырма (18 ұпай)

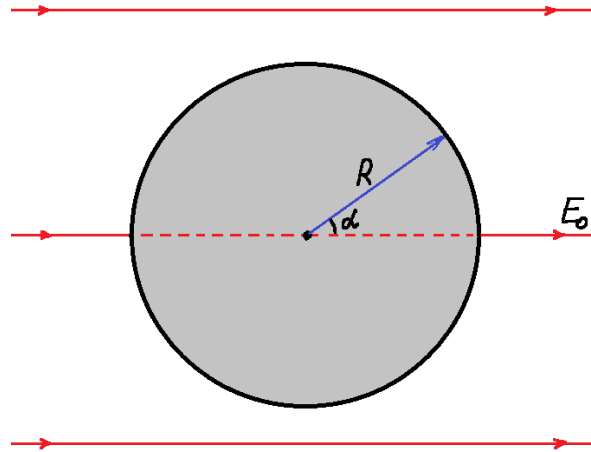
3.1. Екі ұшы жабық тігінен арналасқан цилиндр оңай қозғалатын поршеньмен екі бөлікке бөлінген; төменгі бөлігінде 1 моль, ал жоғарғы бөлігінде 2 моль ауа бар, оны идеал газ деп санауға болады. Температурасы $T_0=320$ К тепе-теңдік күйде, цилиндрдің жоғарғы бөлігіндегі ауа көлемі төменгі бөлігінің көлемінен $k_1=5$ есе үлкен болған. Бұл көлемдердің қатынасы $k_2=4$ есе болуы үшін, ауа температурасы қанша болуы керек?

3.2. Көлденең жылу оқшаулағыш жабық цилиндр, жеңіл қозғалатын, радиусы $r=10$ см және массасы $m=0,5$ кг поршеньмен екі бөлікке бөлінген. Жалпы көлемі $V_0=15$ литр цилиндрде, қысымы $p_0=10^5$ Па болған екі атомды идеал газ бар. Поршеннің сол жағындағы газ мөлшері оң жағындағыдан екі есе көп, $v_1=2v_2$. Поршеньді тепе-теңдік күйінен аздап ығыстырғанда пайда болатын тербелістің жиілігін анықтаңыз.

3.3. Ішінде идеал газы бар, көлденең орналасқан, жылуоқшауланған жабық цилиндр, жеңіл қозғалатын поршеньмен екі бөлікке бөлінген. Тепе-теңдік күйде поршень цилиндрді екі бөлікке бөледі, сол жақ бөлігінде газ мөлшері оң жақтағыдан екі есе көп ($v_1=2v_2$) және газ температурасы T_0 . Поршеньді баяу қозғалтады, сонда газдың температурасы өзгереді. Газ температурасының n -ға тәуелділік функциясын $T(n)$ анықтаңыз. Мұндағы $n=V_1/V_2$ – сол жақ бөлігі көлемінің оң жақ бөлігі көлеміне қатынасы. Газдың адиабаталық көрсеткіші γ .

4-тапсырма (18 ұпай)

4.1. Кернеулігі E_0 біртекті электр өрісіне бейтарап өткізгіш шар енгізіледі. Шарда индукцияланған зарядтың σ беттік тығыздығының α бұрышқа тәуелділігін анықтаңыз (4-сурет). Шар бетінің қандай нүктелерінде өріс кернеулігінің шамасы өзгермейді?



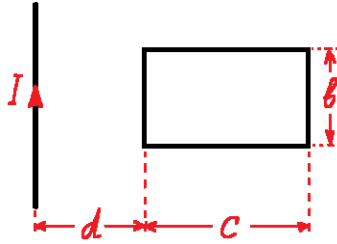
4-сурет

4.2. Радиусы R екі бірдей бейтарап өткізгіш шарлар, центрлері бір-бірінен ℓ ($\ell \gg R$) қашықтықта болатындай етіп, кернеулігі E_0 біртекті электр өрісіне орналастырылған. Шарлардың центрлерін қосатын сызық E_0 векторының бойымен бағытталған болса, шарлардың электрлік әсерлесу күшінің шамасын және бағытын анықтаңыз.

4.3. Шарлардың центрлерін қосатын түзу E_0 векторына перпендикуляр болған жағдай үшін алдыңғы (4.2) есептің шешімін анықтаңыз.

5-тапсырма (18 ұпай)

5.1. Қабырғалары c және b болған тікбұрышты жақтау, I тогы бар түзу ұзын сымнан d қашықтықта орналасқан (5-сурет). Тыныш тұрған жақтауды тұрақты a үдеумен оңға қарай қозғалтады. Циклдің индуктивтілігін елемей, ондағы пайда болатын индукциялық ЭҚК-інің максимал мәнін анықтаңыз.



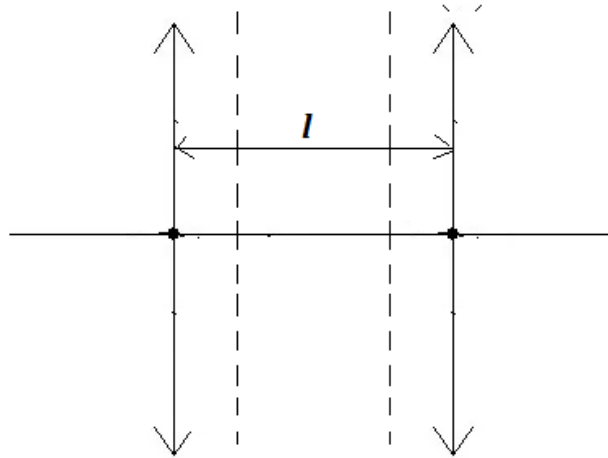
5-сурет

5.2. Қабырғалары c және b болған тікбұрышты жақтау, I тогы бар түзу ұзын сымнан d қашықтықта орналасқан. Егер жақтаудың кедергісі R болса, сымдағы токты өшіргенде, жақтау қандай P импульсқа ие болады. Реактив кедергіні елемей.

5.3. Қабырғалары c және b болған тікбұрышты жақтау, түзу ұзын сымнан d қашықтықта орналасқан. Жақтаудың активті кедергісі R және индуктивтілігі L . Сым бойындағы ток $t=L/R$ уақыт аралығында нөлден I -ге дейін бірқалыпты артса, осы уақыт аралығында жақтауда қанша Q жылу бөлінеді?

6-тапсырма (18 ұпай)

6.1. Кез келген оптикалық жүйе үшін $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ формуласы жарамды, мұндағы d және f оптикалық жүйенің кардиналдық жазықтықтарынан нәрсеге және кескінге дейінгі қашықтықтары (жұқа линза үшін олардың екеуі де бас жазықтықпен сәйкес келеді). Бір-бірінен ℓ қашықтықта орналасқан, фокус аралықтары F_1 және F_2 екі жұқа линзалар жүйесі үшін (6-сурет), жүйенің кардиналдық жазықтықтарының орнын және F фокус аралығын анықтаңыз.



6-сурет

6.2. Сыну көрсеткіші $n=1,3$ материалдан жасалған, беттерінің қисықтық радиустары $R_1=30$ см, $R_2=40$ см және қалыңдығы $h=1$ см болған қалың жинағыш линза үшін, жүйенің кардиналдық жазықтықтарының орнын және F фокус аралығын анықтаңыз.



4th International creative competition of teachers and coaches of the Olympic reserve in mathematics, physics and informatics

Математика, физика және информатика пәндері бойынша мұғалімдер мен олимпиадалық резерв жаттықтырушыларының IV халықаралық ашық шығармашылық байқауы

1-задание (9 баллов)

Циклоида – это кривая, которую описывает точка, находящаяся на ободе колеса, которое катится равномерно и без проскальзывания.

1.1. Написать уравнение циклоиды в параметрической форме: $x(\varphi)$, $y(\varphi)$. Радиус колеса – R , угол поворота колеса – φ . Начальное местоположение точки: $x(0)=0$, $y(0)=0$ при $\varphi=0$.

По наклонному желобу, имеющему форму вогнутой циклоиды, соскальзывает без трения шайба (см. рисунок-1). Начальная скорость шайбы $v_0=0$, координата точки (x_0, y_0) .

1.2. Найти время соскальзывания шайбы до нижней точки желоба.

1.3. Найти период колебания шайбы по желобу.

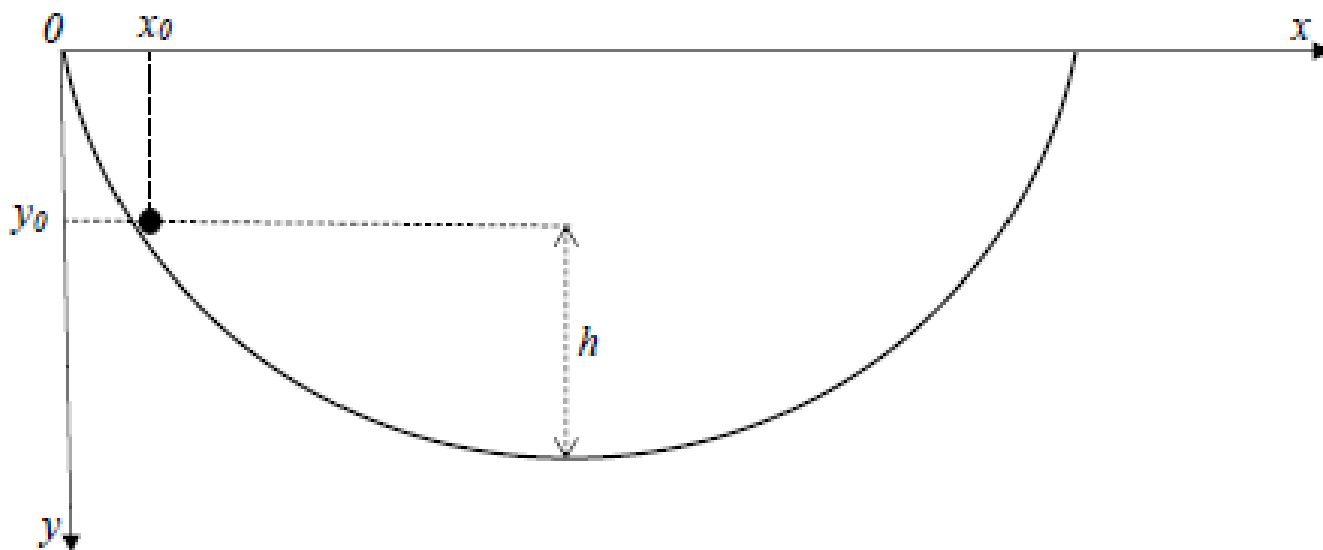


Рисунок-1

2-задание (13 баллов)

2.1. Цепочка массы m и длины L висит неподвижно, касаясь нижним концом поверхности стола (рисунок-2). Цепочку отпускают. Найти зависимость силы давления цепочки на стол от времени и среднюю величину силы давления цепочки на стол за время падения.

2.2. Цепочку прикрепили к потолку так, что цепочка провисает под потолком на расстояние $L/(2\sqrt{3})$ (рисунок-3). Найти силу натяжения цепочки в точке А, которая находится на расстоянии $L/3$ от одного конца.



Рисунок-2

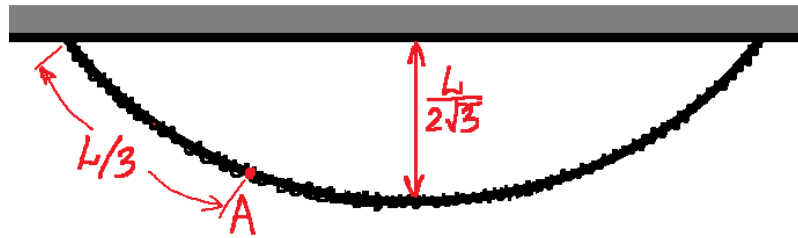


Рисунок-3

3-задание (18 баллов)

3.1. Вертикальный закрытый с обоих торцов цилиндр разделён на две части легкоподвижным поршнем; в нижней части находится 1 моль воздуха, а в верхней части 2 моля воздуха, который можно считать идеальным газом. В равновесном состоянии при температуре $T_0=320$ К объем верхней части цилиндра $k_1=5$ раза больше объема нижней части. При какой температуре отношение этих объемов станет $k_2=4$?

3.2. Горизонтальный теплоизолированный закрытый цилиндр разделен на две части легкоподвижным поршнем, радиуса $r=10$ см и массы $m=0,5$ кг. В цилиндре с общим объемом $V_0=15$ литров находится двухатомный идеальный газ под давлением $p_0=10^5$ Па. В левой части количество газа в два раза больше чем в правой $\nu_1=2\nu_2$. Найти частоту колебаний поршня, возникающих при небольшом смещении его от положения равновесия.

3.3. Горизонтальный теплоизолированный закрытый цилиндр с идеальным газом разделен на две части легкоподвижным поршнем. При равновесии поршень делит цилиндр на две части, в левой части количество газа в два раза больше чем в правой $\nu_1=2\nu_2$, температура газа T_0 . Поршень медленно перемещают, и температура газа меняется. Найти температуру газа $T(n)$ как функцию n , где $n=V_1/V_2$ - отношение объема левой части к объему правой части. Показатель адиабаты равен γ .

4-задание (18 баллов)

4.1. В однородное электрическое поле с напряженностью E_0 вносят незаряженный проводящий шар. Найти зависимость поверхностной плотности индуцированного заряда σ от угла α (рисунок-4). В каких точках на поверхности шара, величина напряженности поля не изменится?

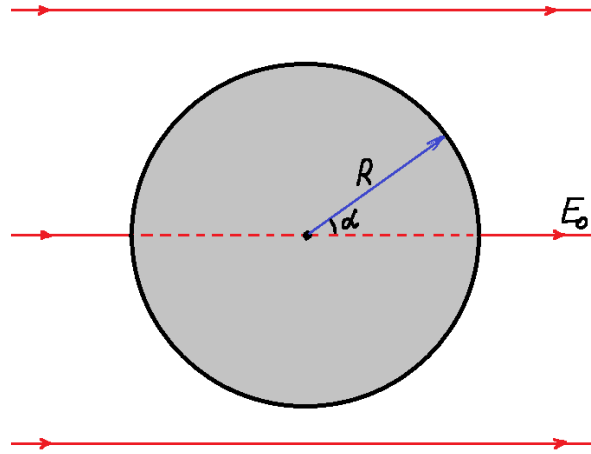


Рисунок-4

4.2. Две одинаковые незаряженные проводящие шары радиуса R каждая помещены в однородное электрическое поле с напряженностью E_0 так, что центры шаров расположены на расстоянии ℓ друг от друга, причем $\ell \gg R$. Линия, соединяющая центры шаров, направлена, вдоль вектора E_0 . Вычислить величину и направление силы электрического взаимодействия между шарами.

4.3. Решить предыдущую задачу (4.2) при условии, что линия, соединяющая центры шаров, перпендикулярна вектору E_0 .

5-задание (18 баллов)

5.1. Прямоугольная рамка со сторонами c и b находится на расстоянии d от прямого длинного провода с током I (рисунок-5). Рамку начинают поступательно перемещать вправо с постоянным ускорением a без начальной скорости. Пренебрегая индуктивностью рамки найти максимальное значение возникающей в ней ЭДС индукции.

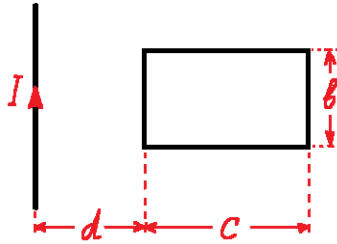


Рисунок-5

5.2. Прямоугольная рамка со сторонами c и b находится на расстоянии d от прямого длинного провода с током I . Какой импульс P получит рамка при выключении тока, если активное сопротивление рамки равно R , а реактивным можно пренебречь?

5.3. Прямоугольная рамка со сторонами c и b находится на расстоянии d от прямого длинного провода. Активное сопротивление и индуктивность рамки равны R и L . За промежуток времени $t = L/R$ ток в прямом проводнике равномерно возрастает от нуля до I . Какое тепло Q выделится за этот промежуток времени в рамке?

6-задание (18 баллов)

6.1. Для произвольной оптической системы справедлива формула $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$, где расстояния до источника и изображения (d и f) отсчитываются от так называемых кардинальных плоскостей системы (для тонкой линзы обе они совпадают с главной плоскостью). Для системы двух тонких линз (рисунок-6) с фокусными расстояниями F_1 и F_2 , отстоящих друг от друга на расстояние ℓ , определите положение кардинальных плоскостей и фокусное расстояние F системы.

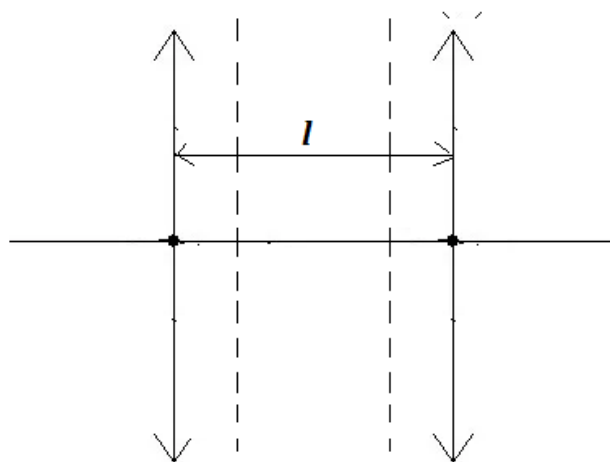


Рисунок-6

6.2. Определите положение кардинальных плоскостей и фокусное расстояние F для толстой собирающей линзы, толщиной $h=1$ см, с радиусами кривизны поверхностей $R_1=30$ см и $R_2=40$ см, выполненной из материала с показателем преломления $n=1,3$.